Das Geometrie Mitmachscript

bearbeitet von

____

mehr Informationen und Arbeitsblätter unter www.ius.edupage.org

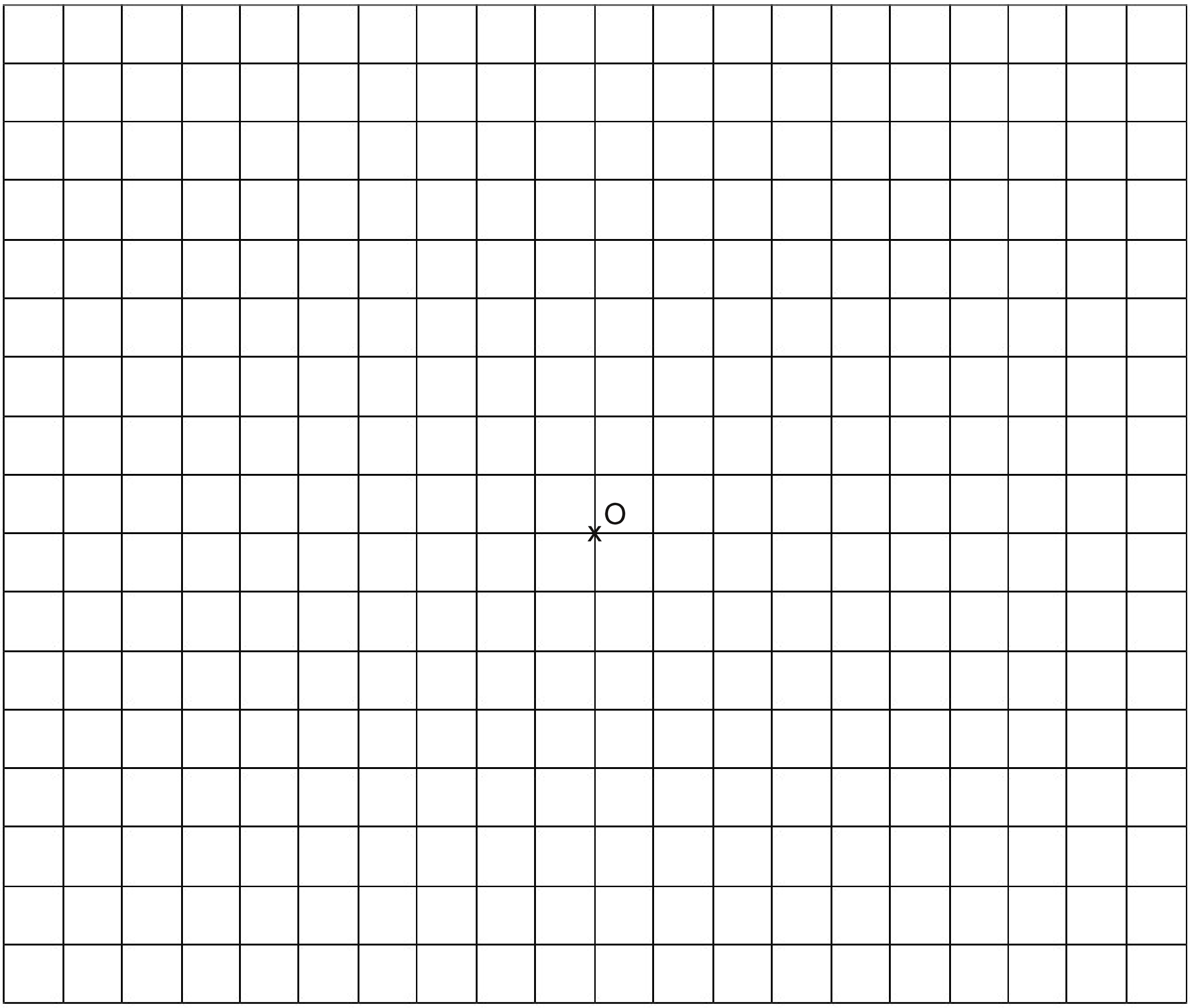
gestaltet von Daniel Roth

1. Der Anschauungsraum IR^3 und der Begriff des Vektors

Ziel der Geometrie ist es die Lage von endlichen und unendlichen Figuren im Raum zu bestimmen. Die gesamte Schulgeometrie kann man sich vorstellen.

Die Geometrie findet im cartesischen euklidischen Anschauungsraum IR^3 statt. Dieser besteht aus unendlich vielen Punkten und ihm befindet sich der Ursprung O(rigin) und ein cartesisches Koordinatenkreuz, welches aus der $x1$ - Achse, der $x2$ - Achse sowie der $x3$ - Achse besteht, die alle rechtwinklig zueinander sind. Da man den Raum auf das Papier bringen soll zeichnet man perspektivisch, d.h. Die $x1$ - Achse wird schräg nach vorne gezeichnet und ihre Einheiten um den Faktor gekürzt.

Gegeben seien die Punkte A(1|1|1), B(1|3|1), C(1|3|3), D(1|1|3) sowie S(5| 2 | -1) . Zeichnen Sie die Punkte in untenstehendes Koordinatensystem ein.



Der Vektor

Unter einem Vektor versteht man eine Verschiebung im Raum, welche durch folgendes Zeichen ausgedrückt wird:

gelesen:

Gezeichnet wird ein Vektor als Pfeil. Zeichnen Sie den Vektor zweimal rot in das Koordinatensystem, indem Sie ihn an den Punkt A sowie den Punkt S anhängen.

Spitze minus Fuß
(KK): Wie bestimme ich den Vektor von A(1|1|1) nach B(1|3|1) ?

Ich rechne diese Regel heißt „

Möchte man den Vektor vom Ursprung zu einem Punkt (Punkt zum Vektor machen) so schreibt man den Punkt einfach untereinander.

Die Vektoraddition
Da Vektoren keine Zahlen sind, kann man sie nicht einfach zusammenaddieren. Das + bei Vektoren bedeutet, dass man sie aneinanderhängt, das ergibt wieder einen Vektor.

Will ich zum Beispiel die Vektoren und aneinanderhängen so ergibt sich:

Die Skalare Multiplikation
Wenn ich einen Vektor mit einer Zahl, einem Skalar zum Beispiel 3 multipliziere, so verlängere ich ihn um diesen Faktor. Ist die Zahl kleiner 1 zum Beispiel 0.5, so verkürze ich ihn.

So gilt 3 ·u = 3 · =

Die Addition und die sklare Multiplikation lassen sich kombinieren. Rechnen Sie zum Beispiel:

4· + 2 · =

2· - 4 · =

- + 0,5 · =

Der Gegenvektor

Ist ein Vektor gegeben so heißt der Gegenvektor von .

Beim Gegenvektor ist die Spitze umgedreht. Zeichen Sie den Gegenvektor in das Koordinatensystem an A dran. Addiert man Vektor und Gegenvektor so ergibt sich:

Mittelpunkt M zwischen den Punkten A(2| 0|-1) und B(4|-2| 5)

Schreiben Sie sich die Punkte übereinander und bilden Sie einfach den Mittelwert zwischen A und B.

A(2| 0|-1)
B(4|-2| 5)

M(   )

* Den Mittelwert zwischen zwei Zahlen finden Sie, indem Sie die Zahl angeben, die von beiden Zahlen auf dem Zahlenstrahl gleich weit entfernt ist. Die Mitte zwischen 2 und 3 ist also 2,5, die zwischen 2 und 2 ist 2 und die zwischen -1 und 7 ist 3 (vier weg von beiden). Wenn das alles viel zu verwirrend ist können sie alternativ auch beide Zahlen addieren und das Ergebnis durch zwei teilen.

Spiegelpunkt A' von A(2| 0|-1) mit M (3|-2| 5) als Zentrum

Jetzt ist L die Mitte zwischen A und A'. Wir nehmen das Mittelpunktschema nur lassen wir A' aus, weil unbekannt und tragen M ein.

A(2 | 0 | -1)
A'(| |)

M(3| -2| 5)

Jetzt wird es ein wenig komisch, aber halten sie durch: Um von dem x1-Wert von A, der 2 zum x1-Wert von M, der Mitte zu kommen, müssen sie +1 rechnen. Wenn Sie nun nochmal +1 rechnen kommen Sie auf 4, dem x1-Wert von A'.

Eckpunkt D des Parallelogramms mit den anderen Eckpunkten A(2| 0|-1), B(3|-2| 5) und C (-3|4|2) finden.

Ohne Skizze sind wir blind. Bei der Reihenfolge von Eckpunkten wird in der Geometrie bei A angefangen und dann gegen den Uhrzeigersinn numeriert. (Das ist eigentlich Quatsch, denn wenn ich das auf eine Scheibe male und eine andere schaut von der anderen Seite, so ist bei ihr ja die Reihenfolge anders. Aber Ordnung muss ja bekanntlich sein, also machen wir es mit, das Ministerium hat immer recht.) Uns so gehts. Wir sehen um von D nach C zu kommen ist die gleiche Bewegung, wie von A nach B. Der x1-Wert von B ist um eins größer, als der von A, also muss der x1 Wert von D -4 sein. (von 2 zu 3 ist wie von -4 zu -3). Weiter gehts...

* Theoretische Vertiefung (Sie wissen schon, für Nerds): Vektoren sind nur gerade Verschiebungen (wobei keiner weiß, was gerade eigentlich ist). Deshalb sind sie nie fest im Raum verankert. Wenn Sie gerade eine Müslipackung nach rechts schieben, um besser fernsehen zu können und ihre Nachbarin in der Wohnung unter Ihnen das gleiche tut, so wird das durch den selben Vektor ausgedrückt. Sie machen die gleiche Bewegung. Es gibt in diesem Fall keinen oberen Vektor, genau so wie es kein oberes Frühstücksfernsehen, oder kein oberes Schwarz bei den Fernbedienungen gibt. Es gibt aber einen oberen und einen unteren Fernseher. (Da können Sie mal drüber nachdenken, he).

Die Vektorkette

Mit einer Vektorkette bewegen wir uns im Raum, indem Vektoren an Punkte gehängt werden und so neue Punkte erreicht werden. Alle drei Karteikarten von oben können mit einer Vektorkette bearbeitet werden. Für den Mittelpunkt von A(2| 0|-1) und B (4|-2| 5) gilt:

Für den Spiegelpunkt A' von A(2| 0|-1) mit M (3|-2| 5) als Zentrum gilt:

Für den Eckpunkt D des Parallelogramms gibt es zwei Varianten:

Richtung, Orientierung und Länge

Vektoren haben nur drei Eigenschaften, in denen sie sich unterscheiden. Diese werden am besten durch den Vergleich verstanden:

a) b) c) d) e) f) g) h)

Die Richtung und die Orientierung

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix}\quad \vec{z}\,'=\begin{pmatrix}0\\-6\\-9\end{pmatrix}\quad \vec{z}\,''=\begin{pmatrix}0,5\\-1\\1,5\end{pmatrix}$$

Die Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors ist etwas anderes als der Vektor. Wir benutzen das Betrags-zeichen. Die Länge eines Vektors berechnet sich mit der Wurzelformel, indem man die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten zieht. So berechnet sich die Länge von

$| v | =$

Da ein dreifach verlängerter Vektor dreimal so lang ist kann man folgendermaßen rechnen:

$|3 v | =$ oder geschickter: $|3 v | =$

Der Einheitsvektor

Der Einheitsvektor zu einem Vektor hat die gleiche Richtung wie , aber die Länge 1. Er wird geschrieben. Um den Einheitsvektor zu berechnen muss man erst die Länge des Vektors ausrechnen. Wenn man ihn dann durch diese Länge teilt bekommt man den Einheitsvektor. Nehmen wir zum Beispiel den Vektor

$a =$

Seine Länge beträgt

Der Einheitsvektor ist demnach

* Superchecker können sich sogar die Formel für den Einheitsvektor herleiten:

Fachbegriffe Kapitel 1 - erste Woche

Vektor - Eine gerade Verschiebung im Raum, hat Richtung, Orientierung und Länge.

Gegenvektor von a - Vektor mit der geleichen Richtung und Länge, aber anderer Orientierung.

Länge eines Vektors - Wurzelformel: Wurzel aus der Summe der Quadratzahlen der Komponenten.

Einheitsvektor von a - Vektor, der die gleiche Richung und Orientierung, aber Länge 1 hat.

Arbeitsblatt Geometrie 1 - Aufgaben zu Kapitel 1

1. (Der Oktaeder) Zeichnen Sie folgende Punkte in ein Koordinatensystem:
A(3|1|4) , B(-5| -3|3), C(-6|1|-5), D(2|5|-4), S (-4,34| 5,97| 2,34), S*(1,34| -3,97 | –3,34) . Verbinden Sie die Figur mit einem Farbstift so dass ein Körper entsteht.

2. (Der Spielplatz). Ein Spielplatz befindet sich in der x1-x2 Ebene 1 LE = 1 m. Zeichenen Sie die folgenden Gegenstände in ein ausreichend großes Koordinatensystem. Die Rutsche (1|2|0), (2|2|0), (1|3|3), (2|3|3) sowie das Ende (1|7|0), (2|7|0). Die Drehscheibe mit den äußeren Punkten (1|-1|0), (3|-3|0), (5|-1|0) und (3|1|0) , 1 Meter darüber finden sich die äußeren Punkte des Geländers, sowie die Wippe (-1|2|0) , (-5|3|1). Den Spielplatz umgibt ein 2 Meter hohen Zaun mit den Eckpunkten (-10| -10| 0), (10|-10|0), (10|10|0) sowie (-10|10|0). Zeichen Sie alle Punkte ein und skizzieren Sie den Spielplatz. Berechnen Sie den Mittelpunkt der Wippe. Wie weit befindet sich die Rutsche über dem Boden?

3. Überprüfen Sie ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm bildet, d.h. ob die zwei sich gegenüberliegenden Vektoren gleich sind. Zeichnen Sie die Koordinaten in ein Kartesisches Koordinatenkreuz ein und überprüfen Sie ihr Ergebnis zeichnerisch.

a) A(-2| 2 | 3), B(5 | 5 | 5), C (9 | 6 | 5), D(2 | 3 | 3)
b) A(2| 0 | 3), B(4 | 4 | 4), C (11 | 7 | 9), D(9 | 3 | 8)
c) A(2| -2 | 7), B(6 | 5 | 1), C (1 | -1 | 1), D(8 | 0 | 8)
d) A(-3 | -3), B(2 | -2), C (5 | 1), D(1 | 6) (im IR2 zeichnen)

4. Das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel. (Nachweis nicht erforderlich). Zeichnen Sie die Punkte A, B, C in ein Koordinatensystem, wieso ist der gemessene Winkel bei B kein rechter? Berechnen Sie jeweils die Mittelpunkte von A und B, A und C sowie B und C. Zeichnen Sie diese ein. Bestimmen Sie schließlich den Punkt D so, dass ABCD ein Rechteck ergibt.

a) A(2| 4 | 1), B(3 | -1 | 3), C (6 | 0 | 4)
b) A(5| 2 | 4), B(2 | -2 | 1), C (3 | -2 | 0)
c) A(4| 4 | 3), B(0 | 0 | 0), C (0 | 6 | -8)

5. Zeigen Sie, dass die Punkte ABC (bei b) ABD) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, indem Sie die Längen ausrechnen eine Skizze anfertigen und zeigen, dass der Satz des Pythagoras gilt. Zeichnen Sie das Dreieck in ein Koordinatensystem. Bilden Sie die Mitte M zwischen A und C (bei b) B und D) und bestimmen Sie den Spiegelpunkt von B (bei b) von A) mit Zentrum M. Was für ein Punkt ist das?

a) A(0| 0 | 6), B(0 | 0 | -3), C (4 | 2 | -3)
b) A(2| 4 | 1), B(3 | 5 | 3), D (4 | -2 | 3)

2 Skalarprodukt, Winkel und Vektorprodukt

Das Skalarprodukt

Beim Skalarprodukt werden zwei Vektoren miteinander multipliziert und man erhält eine Zahl, ein Skalar. Man rechnet dabei nach dem Prinzip „das mal dem + das mal dem + das mal dem“. Da das „mal“ für Vektoren anders ist als das „mal“ für Zahlen nimmt man ein neues Zeichen: o

Der Winkel

Werden zwei Vektoren a und b mit ihren Enden aneinandergehängt, so entsteht zwischen Ihnen ein Winkel. Diesen berechnen wir mit der Winkelformel.

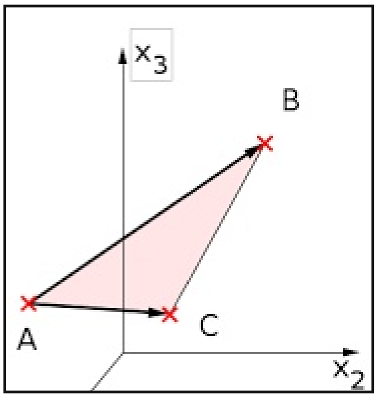
Das Vektorprodukt, der Normalenvektor

Neben dem Skalarprodukt gibt es ein weiteres Produkt zwischen Vektoren, das Vektor- oder Kreuzprodukt. Hier gilt „Vektor mal Vektor ergibt Vektor“ Auch hier verwendet man ein neues Zeichen: „ x “ Der Vektor der sich aus dem Produkt zweier Vektoren und ergibt heißt von und und wird mit bezeichnet. Seine Berechnung erfordert etwas Erfahrung. Seien und gegeben. Dann rechnet man:

Geometrische Bedeutung des Normalenvektors

Der Normalenvektor steht sowohl auf als auch auf senkrecht. Er steht damit senkrecht auf die durch und aufgespannte Ebene.

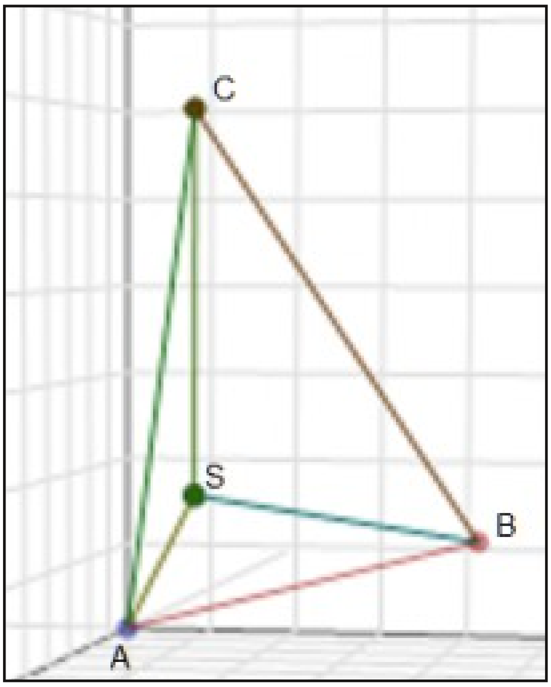
Wie finde ich Fläche eines beliebigen Dreiecks A(2 | -2| 3), B(2|3|7) C(4|3|9) mithilfe des Normalenvektors?



Die Hälfte der Länge des Normalenvektors der Aufspannvektoren des Dreiecks ergibt die Fläche.

Wie finde ich das Volumen einer dreiseitigen Pyramide A(2 | -2| 3), B(2|3|7), C(4|3|9), S(7|-1|1), die von drei Vektoren aufgespannt wird?

Ich bilde die drei Aufspannvektoren von einer Ecke aus und berechne das Volumen mit folgender Formel:



Arbeitsblatt Geometrie 2 - Skalar- und Vektorprodukt

0. Der Nikolaus hat sein Haus mit einer Ecke auf den Nordpol 0 (0|0|0) gebaut. Weitere Eckpunkte sind A(10/0/0), B(10/6/0) C(0|6|0). 4 Meter darüber beginnt der erste Stock mit den Eckpunkten E (oberhalb von A), F (10|6|4), G(0/6/4) und H (oberhalb des Nordpols). Das Spitzdach ist durch die Punkte J(10|3|7) und K begrenzt. Bei P(6|5|6) ist auf dem Dach eine 3 Meter lange Antenne mit Spitze S montiert. Zeichnen Sie das Haus vom Nikolaus. Und geben Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte an. Wie hoch ist sein Haus? Der Laptop befindet sich beim Punkt A. Wie weit ist er von der Antennenspitze S entfernt? Malen Sie die Zeichnung entsprechend aus.(Fenster, Türen, Rentiere, Elfen, usw.)

1. Berechnen Sie die **Einheitsvektoren** $\vec{a}^0, \vec{b}^0, \vec{c}^0, \vec{d}^0$ zu folgenden Vektoren.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-2,5\\-5\\-5\end{pmatrix},\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie den **Winkel** zwischen den Vektoren.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-1,5\\0,5\\1,5\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2,4\\-1,2\\2,4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

2. Finden Sie zu den zwei Vektoren a, b aus Aufgabe 2 a) – d) jeweils einen Normalenvektor, der auf beide senkrecht steht, indem Sie das **Vektor(Kreuz)produkt** bilden.

3. Überprüfen Sie ob die folgenden Vektoren linear abhängig (= gleiche Richtung habend) sind. Schreiben Sie zuerst auf, was vorliegt, beweisen Sie dann.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-1,5\\0,5\\1,5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\8\\16\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2,4\\-1,2\\2,4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}$

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a) A(0|1|0), B(2|-3|1), C(4|4|3) **b)** A(7|1|2), B(-2|3|0), C(5|4|3) **c)** A(6|1|-6), B(0|-3|0), C(2|2|-2)

5. Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCS

a) A(0|1|0), B(3|-3|0), C(4|4|4) S(2|0|0) **b)** A(1|1|1), B(3|3|-1), C(-4|0|0) S(0|-2|2)

6. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Winkel oder Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck

	Kathete	Kathete	Hypothenuse	α	β	Flächeninhalt
	3		5			
	5	12				
	6		10			
			12	30°		
	gleich	groß	16 $\sqrt{2}$			

3 Die Parameterform von Gerade und Ebene

Die Gerade (Parameterform)

Eine Gerade liegt fest im Kartesischen Raum und ist durch einen
und einen bestimmt. Ausgehend vom Ortsvektor bewegt man sich mit dem Richtungsvektor um zu den anderen Punkten der Gerade zu kommen:

Die Gerade lässt sich auch als wandernder Punkt verstehen, allgemeiner Geradenpunkt genannt, der folgendermaßen aufgeschrieben wird:

AGP (| |)

Setzt man für α irgendwelche Zahlen ein bekommt man weitere Punkte auf der Geraden:

L (M (N (O (

Wie lauten die Gleichungen und die allgemeinen Geradenpunkte der drei Koordinatenachsen? x1-Achse: x2-Achse: x3-Achse: AGPs: S1 (S2 (S3 (

Wie finde ich eine Gleichung der Geraden AB durch A(2 | -2| 3) und B(2|3|7) ? Idee: Ich nehme AB:

* Da die Geraden unendlich lang sind, haben sie keinen Anfangspunkt. Daher sind alle Punkte auf der Geraden als Ortsvektor gleich gut. Ich kann den Ortsvektor also einfach durch einen anderen Punkt der Geraden ersetzen und habe trotzdem noch die gleiche Gerade. Die Richtungsvektoren einer Geraden können durch Vektoren gleicher Richtung ersetzt werden. Deshalb läßt sich bei zwei Geradengleichungen in der Geometrie nicht einfach sehen, ob sie die gleichen Geraden beschreiben.

KK: Wie prüfe ich ob der Punkt P(2|-1|3) auf der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ **ist?**

RS: Ich setzte P für $\vec{x}$ in die Gerade ein und erhalte drei Gleichungen, die ich dreimal nach α auflöse:

$$\begin{aligned} I&:\ 2=1+\alpha \\ II&:\ -1=3-\alpha \\ III&:\ 3=0+3\alpha \end{aligned}$$

Wenn nicht alle drei Werte für α gleich sind (wobei 2=2 mitzählt), so liegt P nicht auf g.

Zeigen Sie, dass Q(4| 0 | 9) auf g liegt:

KK: Wie finde ich den Schnittpunkt der Geraden

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ **und h:** $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ **? (Vorsicht Rechnen!)**

RS: Ich setze die beiden Geraden zeilenweise gleich und erhalte drei Gleichungen.

und jetzt heißt es rechnen...

* Vorsicht, diese Aufgabe erfordert nun wirklich, dass Sie *rechnen* können. Also +, -, :, mit dem Nenner, Distributivgesetz usw. Bei solchen Aufgaben empfiehlt sich folgendes Vorgehen. Fangen Sie an zu rechnen, wenn etwas läuft, dann machen Sie ein paar Minuten lang weiter und sammeln so eventuell eine BE, und hören Sie dann auf. Wenn das Ergebnis wichtig ist, ist es eh angegeben.

Wie können zwei Geraden zueinander liegen?

1. Wir vergleichen die beiden Richtungsvektoren der Geraden.

2.

Die Ebene (Parameterform)

Eine Ebene liegt fest im Kartesischen Raum und ist durch einen

und zwei bestimmt.

Ausgehend vom Ortsvektor bewegt man sich mit den Richtungsvektoren um zu den anderen Punkten der Ebene zu kommen:

* Ebenen haben, wie Geraden, keinen Anfangspunkt. Daher sind alle Punkte auf der Ebene als Ortsvektor gleich gut geeignet. Die Richtungsvektoren einer Ebene müssen nur in der Ebene liegen, daher können sie durch zwei beliebige andere Vektoren die in der Ebene liegen ersetzt werden. Deshalb können wir aus den Parameterformen zweier Ebenen nicht einmal sehen ob die Ebenen parallel sind. Die Parameterform ist zum rechnen daher einfach nicht zu gebrauchen.

Wie finde ich eine Gleichung der Ebene E welche durch A(2 | -2| 3) , B(2|3|7) und C (-1| 0| 3) bestimmt ist (die nicht auf einer Gerade liegen)?

Wie finde ich eine Gleichung der Ebene E welche durch P(2 | 2| -3) und

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ bestimmt ist (wobei P nicht auf g liegt)?

KK: Wie finde ich die Ebene E, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h aufgespannt wird?

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ **und h:** $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

KK: Wie finde ich die Ebene E, die von zwei parallelen Geraden g und h aufgespannt wird?

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ **und h:** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$

Arbeitsblatt Geometrie 3 - Die Parameterform von Gerade und Ebene

0. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, welche durch das Dach des Hauses vom Nikolaus (Blatt 3), und eine Gleichung der Geraden, welche durch die Antenne (Blatt 1) geht.

1. Stellen Sie eine Gleichung der Gerade g auf, die durch folgende zwei Punkte geht.

a) A(2|1|-2) B(3|1|3)

b) A(-2|2|-2) B(-4|5| 0)

c) A(-0,5| 0,5| 2,5) B(-1,5|1,5|-1,5)

d) A(a| 2a| a) B(a| 0| 2a) mit a in IR

e) A(2|1|-2), g steht senkrecht auf die x_1-x_2-Ebene

2. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene auf, die durch folgende drei Punkte geht.

a) A(2|1|-2) B(3|1|3) C(1|1|1)

b) A(-2|2|-2) B(-4|6| 0) C(2|-4|0)

c) A(-0,5| 0,5| 2,5) B(-1,5|1,5|-1,5) C(1|0,5|2)

d) A(-2|2|-2) B(-4|6| 0) C(0|0|0)

3. Stellen Sie eine Gleichung der

a) $x_1 - Achse$ b) $x_2 - Achse$ c) der Ebene in der die x_1 *und die* $x_2 - Achse$ *liegen* auf.

4. Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt. Geben Sie dann eine Gleichung der Ebene E durch P und g an.

a) P(2|2|2) , g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) P (7|0|0), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Überprüfen Sie Lage der folgenden beiden Geraden g und h. Wo möglich geben Sie eine Gleichung der Ebene E durch g und h an.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4 Die Ebene in Normalenform

Eine Ebene in Normalenform ist durch einen und einen bestimmt.

Bildet man den Vektor vom Ortsvektor A zu einem Punkt X auf der Ebene, so steht dieser senkrecht auf den Normalenvektor. Daraus ergibt sich die Ebenengleichung.

Für Normalenvektor und Ortsvektor A(2|-2|0) ergibt sich:

(Vektorform)

Die Vektorform lässt sich weiter rechnen:

Von der Parameterform zur $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Normalenform**

E

1. OV, 2 RV

E

1. OV, 1 NV

Idee: Der Normalenvektor ergibt sich als

Wie finde ich den Schnittpunkt der Ebene E: und $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 33 = 0$ **der**

Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **?**

Ich setze den AGP von g in E ein und löse die Gleichung nach α auf.

Wie finde ich Punkte (und Spurpunkte) der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 8x_3 - 12 = 0$

RS: Jeder Punkt, für den die Gleichung erfüllt ist, liegt auf E. Zuerst probiert man die Punkte mit zwei Nullen. Dies sind die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen, Spurpunkte genannt.

$S_1($ $S_2($ $S_3($

Dann lassen sich beliebige andere Punkte durch ausprobieren finden:

Von der Normalenform E: zur $3x_1+x_2+2x_3-6=0$ **Parameterform (Aber warum?)**

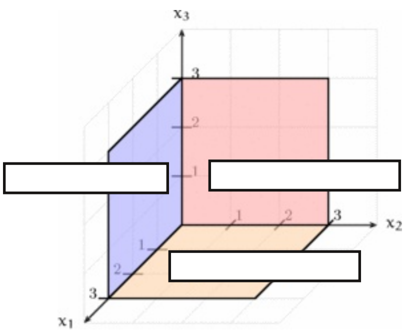
RS: Drei Punkte raten A(B(C(

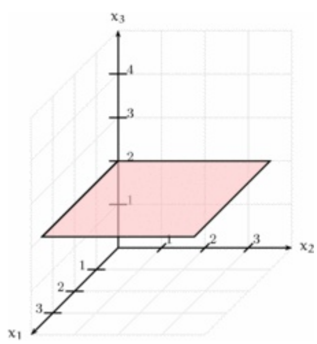
und A als Ortsvektor, a $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ls Richtungsvektoren:

Wie können eine Ebene E und eine Gerade zueinander liegen?

Vergleiche den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade.

Wie lautet die Koordinatenform der x1-x2 Ebene (des Fußbodens)? Wie die der Rück- und Seitenwand?





Aus der Koordinatenform lesen

E: $4x_1+x_2-3x_3-6=0$

F: $8x_1+2x_2-6x_3+5=0$

G: $x_1+5x_2+3x_3=0$

H: $8x_1+2x_2-6x_3-12=0$

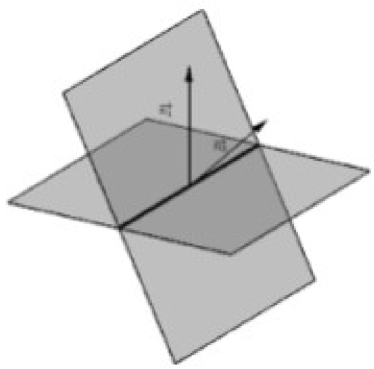
I: $5x_2-4x_3+1=0$

J: $x_1+x_2=0$

Wie finde ich die Schnittgerade s zweier Ebenen

E: $4x_1+x_2-3x_3-6=0$ **und F:** $x_1+x_2-6=0$ **?**

Idee:



Arbeitsblatt Geometrie 4 - Die Normalenform der Ebene

0. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, welche durch drei Punkte bestimmt ist.

a) A(2|4|1) B(0|2|-1) C(4|-2|1) b) B(4| 4| 0) G(4|2|3) S(2|2|7)

Lösungen: a) $3x_1+x_2-4x_3 = 6$ b) $4x_1+3x_2+2x_3 = 28$

1. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene in Normalenform auf, die durch den folgenden Punkt geht und den folgenden Normalenvektor hat. (Rechnen sie die Normalenform bis zur Koordinatenform aus)

a) A(2|1|-2) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** A(-2|2|-2) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** A(-0,5| 0,5| 2,5) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** A(0| 2| 0) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungen a) E: $3x_1-x_2+2x_3-1=0$ b) E: $2x_1-x_2+6=0$
c) E: $0,5x_1-0,5x_2+x_3-2=0$ d) E: $-4x_1+2x_2+x_3-4=0$

2. Geben Sie einen Normalenvektor der folgenden Ebene an.

a) E: $x_1-2x_2+x_3-4=0$ b) E: $-2x_2+4x_3=0$

c) E: $x_2=0,5$ d) E: $8x_1-16x_2-24x_3+40=0$

3. Drücken Sie die folgenden Sachverhalte mit Hilfe von Normalenvektoren aus.

a) Zwei Ebenen sind (echt) parallel, wenn______________________________

b) Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, genau dann wenn____

c) Zwei Ebenen sind gleich, wenn__________________________________

d) Eine Gerade schneidet eine Ebene senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Gerade____

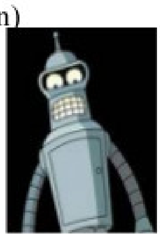
e) Eine Gerade, die nicht in der Ebene liegt, ist parallel zu dieser Ebene, wenn der Richtungsvektor der Gerade__________________________________

4. Rechnen Sie folgende Ebenen in Koordinatenform um:

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösungen a) $E_1: -3x_1-x_2+4x_3+18=0$ b) $E_2: -2x_1+14x_2+10x_3-12=0$

5. Schneiden Sie die Ebenen aus Aufgabe 4 mit folgenden Geraden (4 Aufgaben)



g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen a) $E_1 \cap g: S(6|0|0)$ b) $E_1 \cap h: S(7,125|0,625|1)$ c) $E_2 \cap g: S(6|-4|8)$ d) $E_2 \cap h: S(6|1|1)$

6. Berechnen Sie die Spurpunkte der Ebene E: $-3x_1-x_2+4x_3+18=0$

5 Abstände und Lotfußpunkte

Wie bestimme ich die Hesse Normalenform der Ebene E: ? $4x_1+x_2-3x_3+6=0$

1. Ich berechne die Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}|=\left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right|=$$

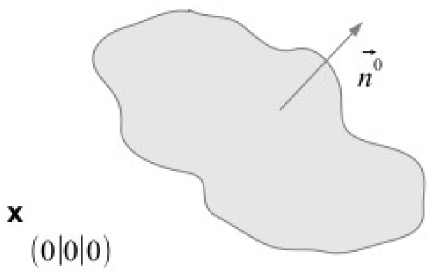
2. Ich achte darauf, dass die Konstante negativ ist.

Dann schreibt man die HNF so auf

E_{HNF} : $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}=0$

Versuchen Sie zwei weitere: $F: x_1+x_2-5x_3-3=0$ $\quad G: 3x_1-4x_2+4=0$

Was ist die geometrische Bedeutung der HNF?*



Der Normalenvektor wird auf die Länge 1 gebracht und ist vom Ursprung abgewandt.

Wie bestimme ich den Abstand eines Punktes von der $x_1-x_2-Ebene$ **?**

Der Abstand d eines Punktes ist seine Höhe, (oder Tiefe), das ist der Betrag seines x_3 Wertes.

P(2|1|4)	d=	R(17|17|0)	d=
Q(-1|5|-6)	d=	S(5|4|3,25)	d=

Wie bestimme ich den Abstand d des Punktes P(2|-1|3) von der Ebene
E: $4x_1+x_2-x_3+6=0$ **?**

RS: **1.** Ich bringe

E_{HNF} : $\frac{\qquad\qquad\qquad}{} = 0$

2. Ich setze P in die HNF ein, dabei fällt das „= 0“ weg, und ich setze zwei Betragstriche

d =

* Wenn der Wert innerhalb der Betragstriche negativ ist, so liegt der Punkt im Halbraum mit dem Ursprung. Das kann ich mit einem Bleistift kennzeichnen.

Wie bestimme ich den Lotfußpunkt L des Punktes P(2|-1|4) auf die Ebene
$E: \ 2x_1+x_2-2x_3+6=0$ **?**

RS: 1. Ich errichte eine Lotgerade l mit

2. Ich schneide die Lotgerade l mit E indem ich den AGP in E einsetze: L (| |)

Wie bestimme ich den Lotfußpunkt L des Punktes P(0|-1|3) auf die Gerade

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ **?**

1. Ich bilde L als AGP von g: L (| |)

2. Ich bilde den Vektor $\vec{PL}$ (Spitze minus Fuß):

3. $\vec{PL}$ muss senkrecht auf den Richtungsvektor von g stehen, das Skalarprodukt also Null ergeben

Arbeitsblatt Geometrie 5 - Abstände und Lotfußpunkte

1. Berechne den Abstand der Punkte

$P(2|1|0)$ $S(-1|2|1)$ $N(0|0|0)$ $Q(3|0|0)$ $T(2|\alpha|1-\alpha)$

von der Ebene E

a) $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$ b) $E: 6x_1 - 8x_3 + 0{,}5 = 0$

c) $E: 2x_2 = 5$ d) der x_1-x_2 Ebene

2. Berechne die Lotfußpunkte F von den Punkten

$P(2|0|0)$ $R(-1|2|1)$ $N(0|0|0)$ $Q(0|4|5)$

zu den Geraden

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Berechne den Lotfußpunkt F von den Punkten

$P(2/0/0)$ $R(-1/2/1)$ $N(0/0/0)$

zu den Ebenen

a) $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$ b) $E: 2x_3 = 5$

4. Gegeben sind die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(6|2|6)$,

Der Abstand von P zu g ist kleiner als 5. Berechnen Sie die Punkte A, B auf g welche von P den Abstand 5 haben, der Punkt mit der kleineren x_2-Koordinate ist A.

Lieben 3ten Advent

Lösungen: 1a) P:5/3 S:0 N: 1/3 Q: 5/3 T:|(2+3α)/3| 2a) 1b) P: 1,25 S: 1,35 N: 0,05 Q: 1,85 T: |(4,5+ α)/10| 1c) P: 1,5 S:0,5 N: 2,5 Q: 2,5 T:|α-2,5| 1d) P:0 S:1 N:0 Q:0 T:|1-α| 2a): F (2|-0,5|0,5) F (2|1|2) F (2|-0,5|0,5) F (2| 4 |5) 2b) F (1| 0 |-1) F (-1 | 0 | 1) N liegt auf g F (-2,5| 0| 2,5) 3a) F (4/3 | - 2/3 | 1/ 3) F (-1 |2 | 1) F (2/9 | 2/9 | -1/9) 3b) F (2| 0| 2,5) F (-1| 2|2,5) F (0|0|2,5) 4: A(2|2|3) B(2|5|6)

G Grundwissen Dreiecke

Für alle Dreiecke gilt die Flächenformel:

Gleichschenklige Dreiecke

Bei gleichschenkligen Dreiecken sind zwei Seiten gleich lang. Die dritte Seite heißt Basis. Die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks kann man ausrechnen, indem man den Vektor von der Spitze zur Mitte der Basis bildet. Die Länge dieses Vektors ist die Höhe.

Rechtwinklige Dreiecke

Der Halbkreis über einer Strecke AB heißt Thaleskreis. Zeichnen Sie den Thaleskreis unten ein:

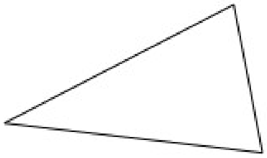
Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks berechen Sie bitte immer mit der Formel: Kathete mal Kathete durch zwei.

Dreiecke, die auf dem Thaleskreis liegen sind rechtwinklig. Zeichnen Sie zwei ein. Der rechte Winkel lässt sich mit dem Skalarprodukt nachweisen. (alle drei testen bis Null raus kommt). Die lange Seite in rechtwinkligen Dreiecken heißt Hypotenuse, die beiden kurzen Katheten. In rechtwinkligen Dreiecken gilt der Satz des Pythagoras, das Quadrat der langen Seite ist die Summe der Quadrate der kurzen. Besonders sind dabei rechtwinklige Dreiecke Längen 3, 4 und 5. Diese waren schon in Ägypten bekannt. Ein anderes berühmtes Pythagoreisches Tripel ist 5, 12 und 13. Die Winkel im rechtwinkligen Dreieck lassen sich einfacher berechnen. Der große gegenüber der Hypotenuse ist eh 90°, die anderen zusammen also wieder 90°. Die Winkel gegenüber den Katheten lassen sich durch folgende Formeln ausrechnen:

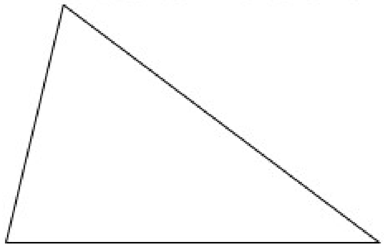
$\sin \alpha = \frac{\quad}{\quad}$ $\cos \alpha = \frac{\quad}{\quad}$ $\tan \alpha = \frac{\quad}{\quad}$

Besondere Linien und Sätze in Dreiecken

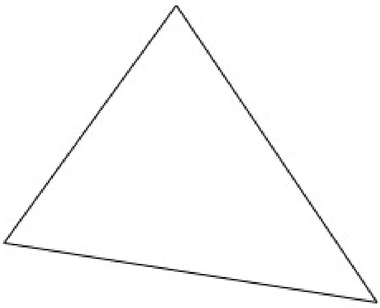
Die Höhen



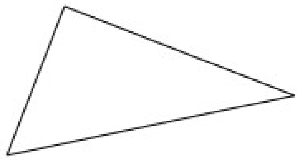
Die Seitenhalbierenden



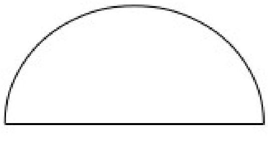
Die Winkelhalbierenden



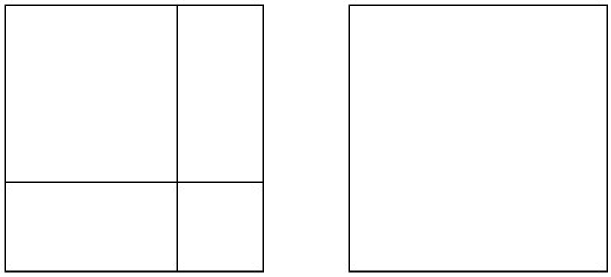
Die Mittelsenkrechten



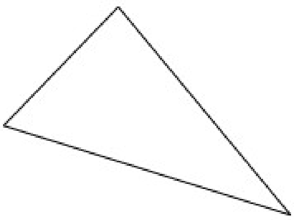
Der Satz des Thales



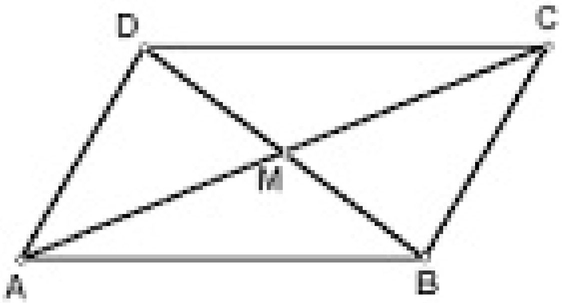
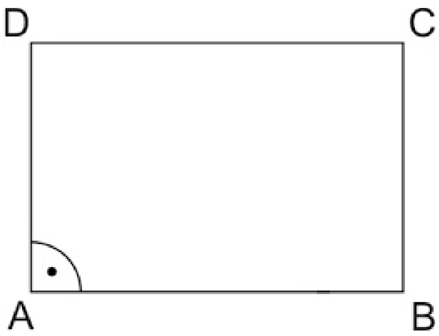
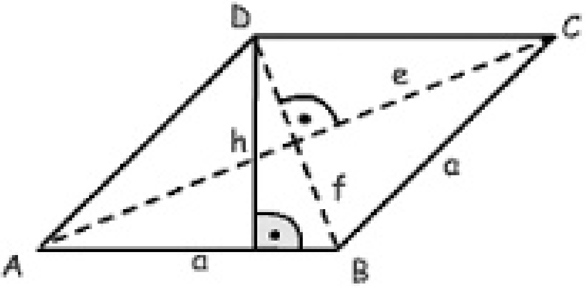
Der Satz des Pythagoras



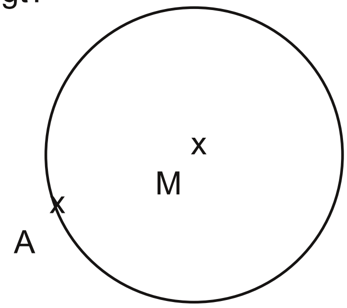
Die Strahlensätze



G Grundwissen Vierecke und Kreis

Wie zeige ich, dass ABCD ein Parallelogramm bilden?  	Zu zeigen: 1. Flächenformel: A = 2. Flächenformel: A =
Wie zeige ich, dass ABCD ein Rechteck bilden?  	Zu zeigen: Flächenformel: A =
Wie zeige ich, dass ABCD einen Drachen bilden? 	Zu zeigen: Oder: Flächenformel: A =
Wie zeige ich, dass ABCD eine Raute bilden?  	Zu zeigen: Oder: Flächenformel: A = 2te Flächenformel: A =

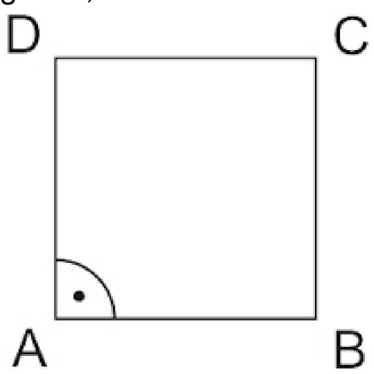
Wie zeige ich, dass A auf dem Kreis um M mit Radius 3 liegt?



Zu zeigen:

Schätzung Fläche: A ≈
Flächenformel: A =
Schätzung Umfang: U ≈
Formel Umfang: U =

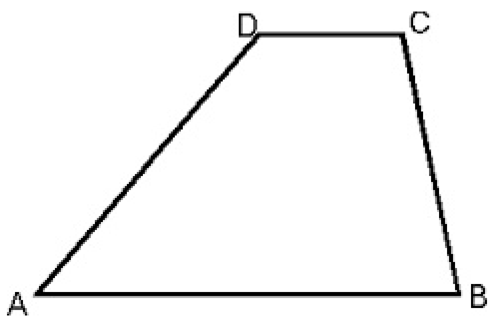
Wie zeige ich, dass ABCD ein Quadrat bilden?



Zu zeigen:

Flächenformel: A =

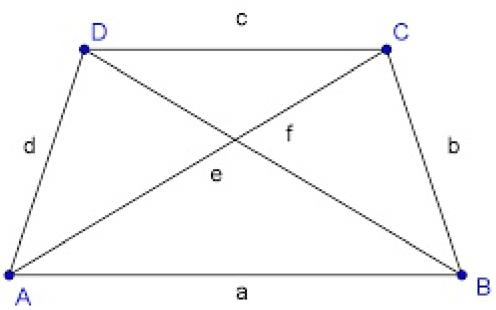
Wie zeige ich, dass ABCD ein Trapez bilden?



Zu zeigen:

Berechnung der Fläche:

Wie zeige ich, dass ABCD ein Zirkustrapez (gleichschenkliges Trapez) bilden?

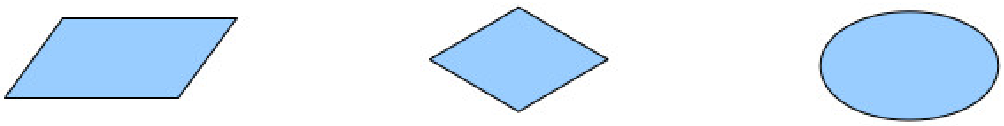


Zu zeigen:

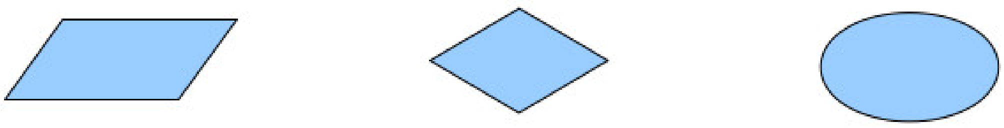
Berechnung der Fläche:

G Grundwissen Körper im Raum

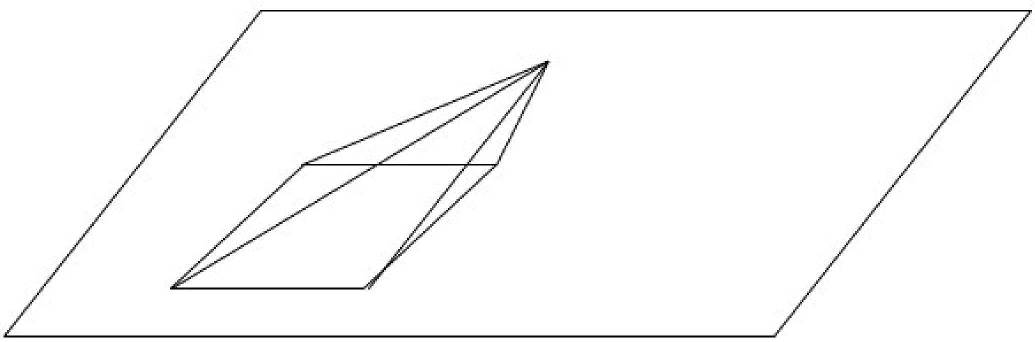
a) Gerade Körper



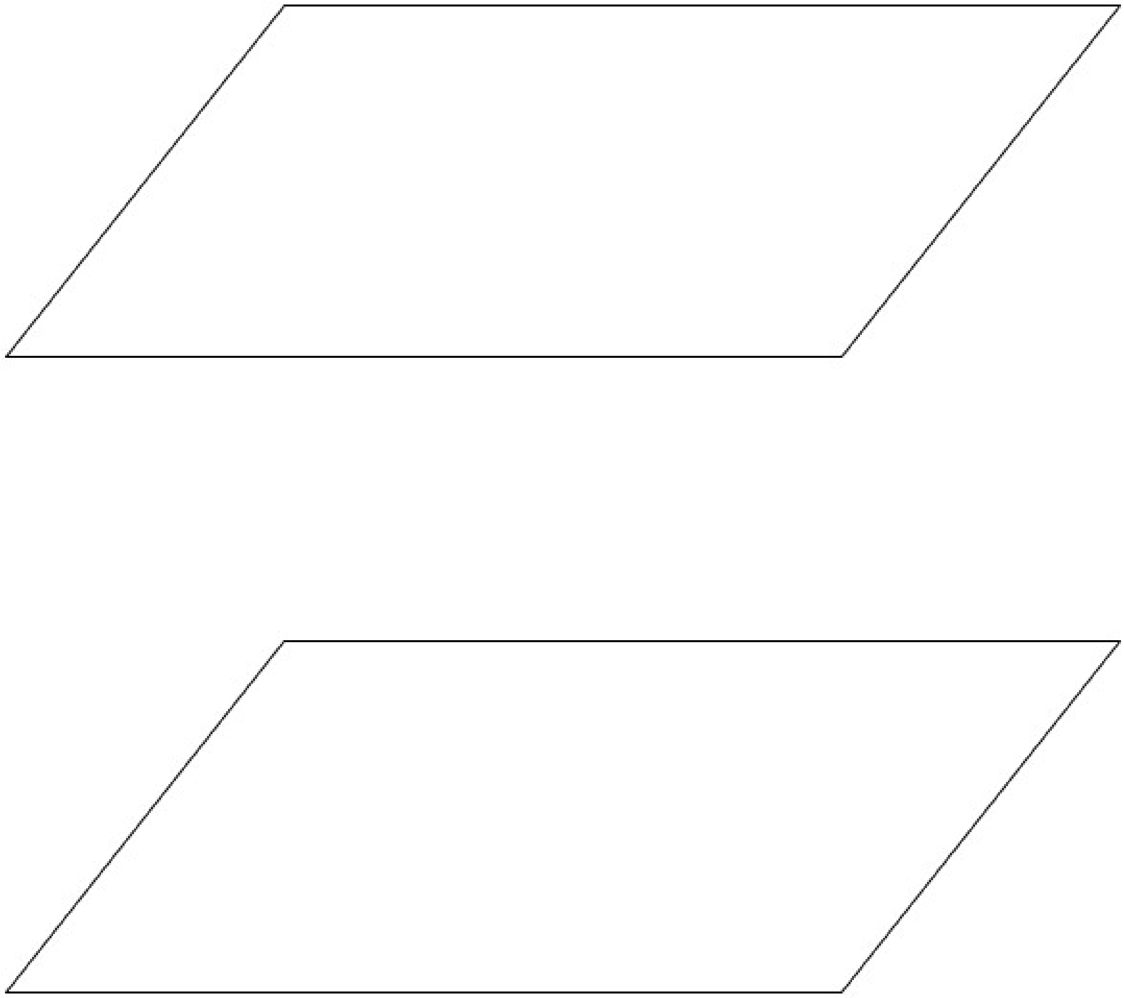
b) Spitze Körper



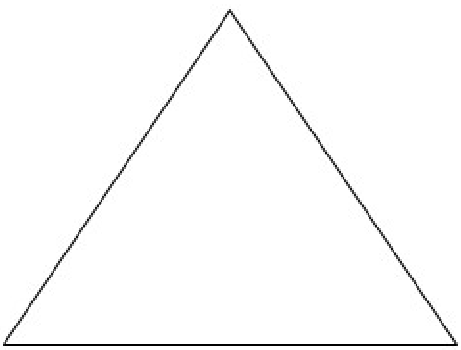
c) Die Höhe einer Pyramide



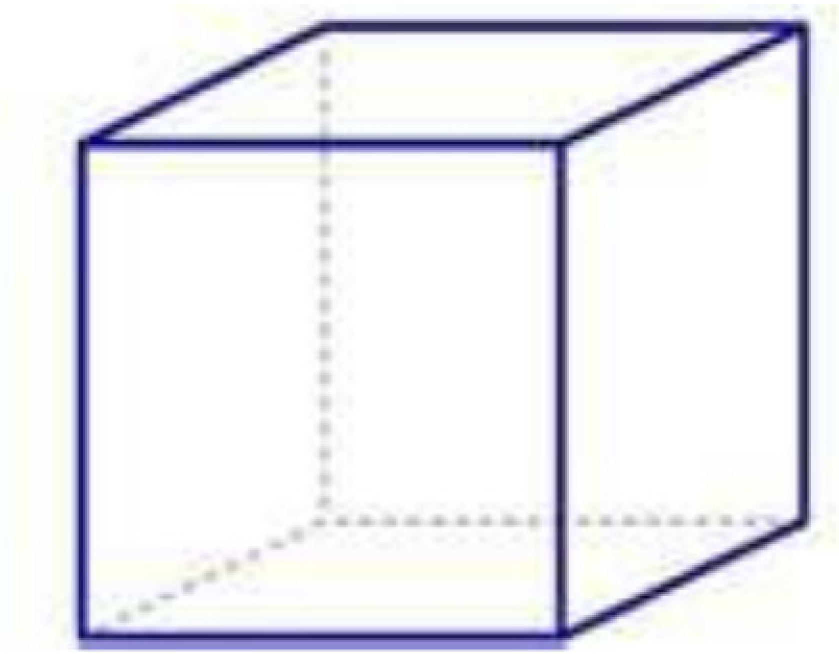
d) Das Volumen hängt nur von h und G ab



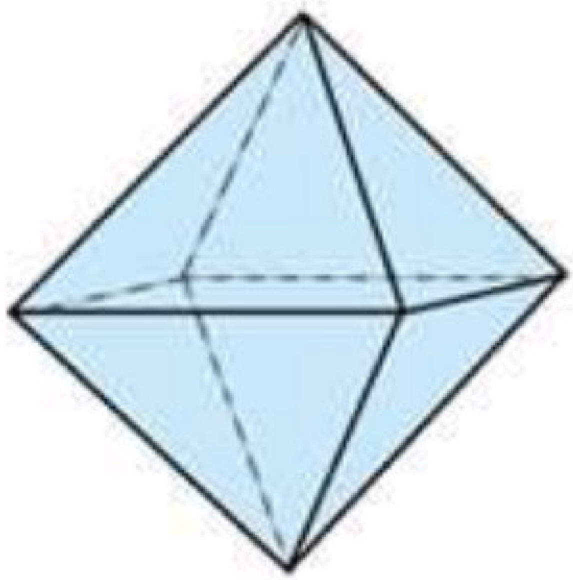
e) Platonische Körper: Der Tetraeder



f) Platonische Körper: Der Würfel



g) Platonische Körper: Der Oktaeder



Arbeitsblatt Geometrie G - Figuren und Körper

0. Zeigen Sie, dass das Dach des Hauses vom Nikolaus (Blatt II) FGKJ ein Rechteck bildet. Berechnen Sie die Fläche der Vorderfornt ABFJE.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte A(1|2|0), B(1|0|2) und C(5|5|5) ein Dreieck in einer Ebene E fest. Zeigen Sie, dass ABC ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Bestimmen Sie die Höhe über der Basis und berechnen Sie den Flächeinhalt und alle Innenwinkel dieses Dreiecks.

2. Zeigen Sie, dass A(2|-2|-2), B($\sqrt{6}$| 0|$\sqrt{6}$), C(-2| 2| 2) und D(-$\sqrt{6}$ | 0 |-$\sqrt{6}$) ein Quadrat mit Flächeninhalt 24 bildet.

3. Zeigen Sie, dass das Viereck P(7|8| 17), Q(-8| -4| 1), R(7|-16|-15), S(22|-4|1) mit Diagonalenschnittpunkt M (7| -4| 1) eine Raute ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt.

4. Gegeben sind die Punkte A(-10|5|-10), B(0|0|0), C(6|17|10), D(-8|19|-5).

a) Zeigen Sie, dass M (-4|9,5|-2,5) der Mittelpunkt zwischen B und D ist.

b) Zeigen Sie, dass es sich um ein Drachenviereck handelt.

c) Weisen Sie nach, dass es einen Kreis um Mittelpunkt M gibt, auf dem A,B und D liegen. Wie groß ist demzufolge der Winkel BAD?

d) Zeigen Sie dass der Drache eine Fläche von 300 FE hat.

5. Gegeben sind die Punkte A(-2|8|0), B(0|0|-2), C(1|2|0) und D(0|6|1).

a) Zeigen Sie, dass A, B, C und D ein gleichschenkliges (Zirkus-) Trapez bilden.

b) Zeigen Sie, dass das Trapez die Höhe $\sqrt{4{,}5}$ hat und berechnen Sie den Flächeninhalt.

6. Die Punkte A(0| -4| 3), B(1|4|-2) und C (-2|4|1) bestimmen eine Ebene.

a) Zeigen Sie dass das ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist und berechnen Sie die Fläche.

b)* Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S, des Umkreismittelpunktes U (Thaleskreis!) und des Höhenschnittpunktes H dieses rechtwinkligen Dreiecks ABC. Erläutern Sie warum die Punkte S, U, H auf einer Gerade liegen.

7. Zeichnen Sie die Pyramide mit Grundfläche A(4|0|0), B(0|3|0) und C(0|0|0) sowie Spitze S(0|0|6) und berechnen Sie deren Volumen.

8. Anwendung. Der Radius am Äquator der Erde beträgt 6378,1 Kilometer, an den Polen 6356,8 Kilometer. Der Radius am Äquator des Mondes beträgt 1738,1 Kilometer, an den Polen 1736,0 Kilometer. Berechnen Sie den Mittelwert der Radien vom Äquator für die Erde und für den Mond. Berechnen sie die Länge des Erd- und des Mondäquators. Berechnen Sie das Volumen vom Mond und von der Erde. Zeigen Sie, dass der Mond nur etwa 2 Prozent des Erdvolumens hat.

9. Rätsel. Superman legt um die Erde einen Schlauch, der genau anliegt. Wenn man den Schlauch nun einen Meter verlängert, und gleichmäßig um die Erde legt, kann man dann unter ihm hindurch kriechen? (Gehen Sie davon aus die Erde sei eine perfekte Kugel; Dinge die im Weg liegen kann Supermann ja einfach wegräumen.)

Lösungen zu den Arbeitsblättern

Blatt 1

2. (Der Spielplatz). Mittelpunkt der Wippe M(-3| 2,5| 0,5). Die Rutsche befindet sich 3 m über dem Boden.

3. a) Parallelogramm b) Parallelogramm c) kein Parallelogramm d) kein Parallelogramm

4. Da perspektivisch gezeichnet wird ergibt sich in der Zeichnung kein rechter Winkel.

a) $M_{AB}(2,5|\ 1,5|\ 2)$ $M_{AC}(4|\ 2|\ 2,5)$ $M_{BC}(4,5|\ -0,5|\ 3,5)$ $S(\frac{11}{3}|1|\frac{8}{3})$

b) $M_{AB}(3,5|\ 0|\ 2,5)$ $M_{AC}(4|\ 0|\ 2)$ $M_{BC}(2,5|\ -2|\ 0,5)$ $S(\frac{10}{3}|-\frac{2}{3}|\frac{5}{3})$

c) $M_{AB}(2|\ 2|\ 1,5)$ $M_{AC}(2|\ 5|\ -2,5)$ $M_{BC}(0|\ 3|\ -4)$ $S(\frac{4}{3}|\frac{10}{3}|-\frac{5}{3})$

5.

a) $|\vec{AB}|=\sqrt{81}=9 \quad |\vec{AC}|=\sqrt{101} \quad |\vec{BC}|=\sqrt{20} \quad \sqrt{81}^2+\sqrt{20}^2=\sqrt{101}^2 (Pythagoras)$

$$\vec{D}=\vec{A}+\vec{BC}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

Blatt 2

1.

$$\vec{a}^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}^0=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix},\quad \vec{c}^0=\frac{1}{7,5}\begin{pmatrix}-2,5\\-5\\-5\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \vec{d}^0=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\vec{d}$$

2. a) φ = 83,82° b) senkrecht c) φ = 133,49° d) φ = 171,53°

2. a) $\vec{n}=\begin{pmatrix}-96\\-72\\48\end{pmatrix}=24\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-9\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ d) $\vec{n}=\begin{pmatrix}-0,2\\0\\-0,2\end{pmatrix}=-0,2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. **a) linear unabhängig** **b) linear unabhängig**

c) linear abhängig $0,6\cdot\vec{a}=\vec{b}$ **d) linear abhängig** $-5\cdot\vec{a}=\vec{b}$

e) linear abhängig $\vec{a}=\vec{b}$ **f) linear abhängig** $-3\vec{a}=\vec{b}$

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC

a) F = $\frac{1}{2}\sqrt{713}=13{,}35$ **b)** F = $\frac{1}{2}\sqrt{762}=13{,}8$ **c) F** = $\frac{1}{2}\sqrt{968}=15{,}56$

5. Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCS

a) V = 3,33 **b)** V = 4

6.	Kathete	Kathete	Hypothenuse	α	β	F
	3	**4**	5	**36,87**	**53,13**	**6**
	5	12	**13**	**22,62**	**67,38**	**30**
	6	**8**	10	**36,87**	**53,13**	**24**
	6	$\sqrt{108}$	12	30°	**60**	**3** $\sqrt{108}$
	16	16	16 $\sqrt{2}$	45	**45**	**128**

Blatt 3

1. Stellen Sie eine Gleichung der Gerade auf, die durch folgende zwei Punkte geht.

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-0.5\\0.5\\2.5\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}$ d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\-2a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

3. Stellen Sie eine Gleichung der

a) $x_1-Achse$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ b) $x_2-Achse$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

c) der Ebene in der die x_1 *und die* $x_2-Achse$ *liegen* $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

4. Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt. Geben Sie dann eine Gleichung der Ebene E durch P und g an.

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$

5. Überprüfen Sie Lage der folgenden beiden Geraden g und h. Wo möglich geben Sie eine Gleichung der Ebene E durch g und h an.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$ b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

g und h parallel **g und h schneiden sich im Ortsvektor**

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

g und h windschief **g und h schneiden sich in S(6|0|3)**

Blatt 4

3.
Zwei Ebenen sind (echt) parallel, wenn die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig (Vielfache) sind, und die Ebenen keine gemeinsamen Punkte haben.

Zwei Ebenen stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihre Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen.

Zwei Ebenen sind gleich, wenn die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig (Vielfache) sind, und die Ebenen einen gemeinsamen Punkt haben.

Eine Gerade schneidet eine Ebene senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Gerade und der Normalenvektors der Ebene linear abhängig sind.

Eine Gerade, die nicht auf der Ebene liegt, ist parallel zu einer Ebene, wenn der Richtungsvektor der Gerade senkrecht zum Normalenvektor der Ebene steht.

G
1. 4 mal die Wurzel aus 6 = 9,80. Winkel: zweimal 78,46 Grad, einmal 23,08 Grad.
2. A = 24 3. A = 600 4. b) Je zwei Seiten nebeinander gleich lang. c) Die Vektoren von A,B und D zu M sind gleich lang d) 90 Grad, da es sich um den Thaleskreis handelt.
5. A = 13,5 6. U (0,5 | 0| 0,5) S(-1/3 | 4/3| 2/3) H(-2| 4 |1) Die Vektoren von U nach S und von U nach H sind linear abhängig. 7. V = 12 8. Der Radius verlängert sich um 16 cm, egal wie groß die Erdkugel ist. Ein Kind kommt vielleicht unten durch.