Feltételes valószínűség
(Podmienená pravdepodobnosť)

Adott két véletlen esemény:

A – A dobókockán páros szám esik.
B – A dobókockán 6 esik.

Ezen események valószínűségét meghatározni könnyű:

$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

$P(B) = \frac{1}{6} = 0{,}16\overline{6}$

Változtassuk meg kérdésünket: Mi annak a valószínűsége, hogy ha páros szám esett, akkor az a 6? (C esemény)

itt megváltozott az összes lehetőségek száma: mivel a kérdés feltételezi a páros szám esését → 3

$P(C) = \frac{1}{3} = 0{,}33\overline{3}$

Éppen így vezetjük be a feltételes valószínűség fogalmát. Az esemény, ami bekövetkezett, maga a feltétel.

D. A ***B eseménynek az A eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége*** (röviden: ***a B esemény A feltétel melletti valószínűsége***), az a B esemény bekövetkezésének a valószínűsége, feltéve hogy az A esemény már bekövetkezett.

$P(B|A)$ vagy $P(B/A)$

T. (*Bayes*)

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

ez azt jelenti, hogy az események metszetének valószínűségét elosztjuk a feltétel valószínűségével

természetesen, ha a fordított feltételes valószínűséget számoljuk, a nevezőben P(B) lesz

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Próbáljuk meg kiszámítani az előző feladatot az új tétel alapján:

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$

Mi annak a valószínűsége, hogy ha 6-os szám esett, akkor az páros lesz? (D esemény)

a definíció szerint:

$P(D) = P(A|B) = \frac{1}{1} = 1$

a tétel alapján:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$

A feltételes valószínűséghez hozzátartozik egy új fogalom:

D. ***Két eseményt független***nek mondunk, ha az egyik esemény valószínűsége nem változik feltétel hozzáadásával (akár bekövetkezik, akár nem a másik esemény).

$P(A|B) = P(A) \lor P(B|A) = P(B) \lor P(A) = 0 \lor P(B) = 0$

T. Két esemény pontosan akkor független, ha $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

M. Ha két esemény nem független, akkor ***függő esemény***ek nevezzük.

példa:

Megállapítottuk, hogy $P(A|B) = 0{,}425$, $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$. Számítsuk ki $P(B|A)$.

a tételből kifejezzük a metszet valószínűségét

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B).P(B) = 0{,}425.0{,}6 = 0{,}255$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}255}{0{,}8} = \frac{51}{160} = 0{,}318\,75$

A C, D véletlen eseményekre érvényes: $P(C) = 0{,}8$, $P(D) = 0{,}4$ a $P(C \cap D) = 0{,}25$. Számítsuk ki:

a, $P(C|D)$ b, $P(D|C)$ c, $P(C \cap \overline{D})$ d, $P(C|\overline{D})$

a, $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25}{0,4} = \frac{5}{8} = 0,625$

b, $P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0,25}{0,8} = \frac{5}{16} = 0,312\ 5$

c, $P(C \cap \overline{D}) = P(C) - P(C \cap D) = 0,8 - 0,25 = 0,55$

d, $P(C|\overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P(C|\overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,55}{0,6} = \frac{11}{12} = 0,916\ \overline{6}$