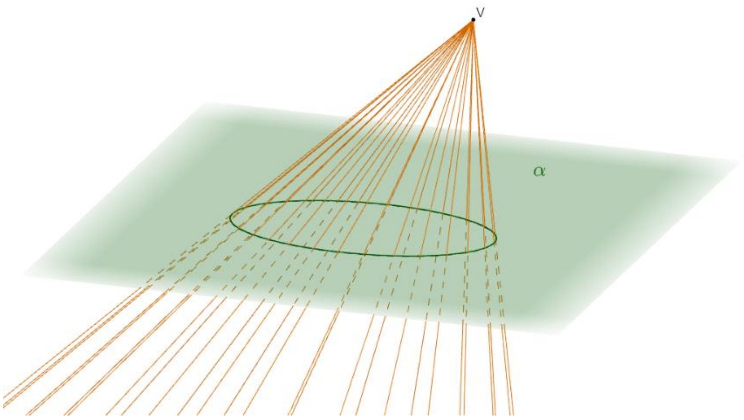
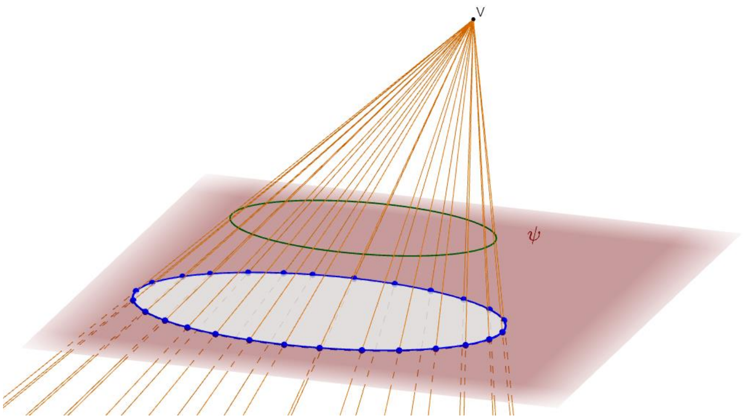
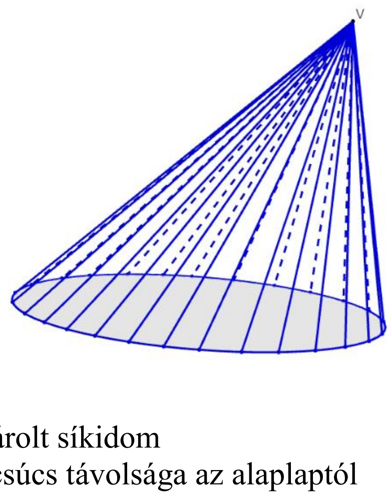
A kúp felszíne és térfogata
(Povrch a objem kužeľa)

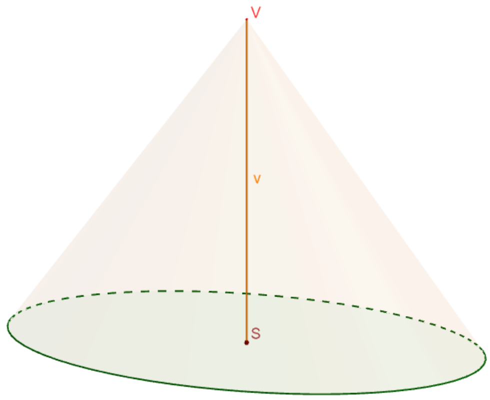
D. Adott egy görbékkel határolt síkidom (***vezéralakzat***/***vezérgörbe*** – riadiaci/určujúci útvar) és egy pont (***csúcs*** – vrchol), mely nem fekszik a síkidom síkjában. Ha az alakzat határpontjain keresztül V kezdőpontú félegyeneseket veszünk fel, egy végtelen kúpfelületet kapunk – végtelen kúp. Ezek után egy, a kúpfelületet metsző síkkal elmetszve megkapjuk a ***kúp***ot, mint a végtelen kúpfelületnek a csúcs és a sík közé eső részét.



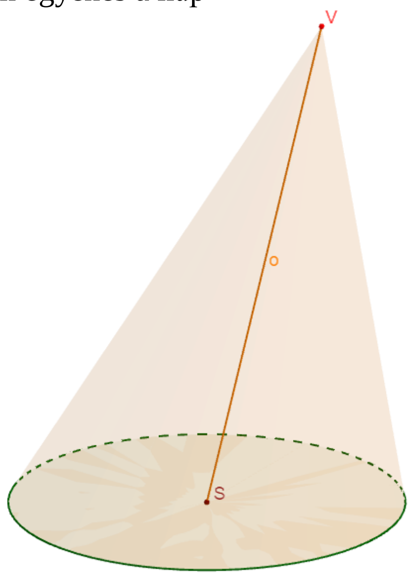




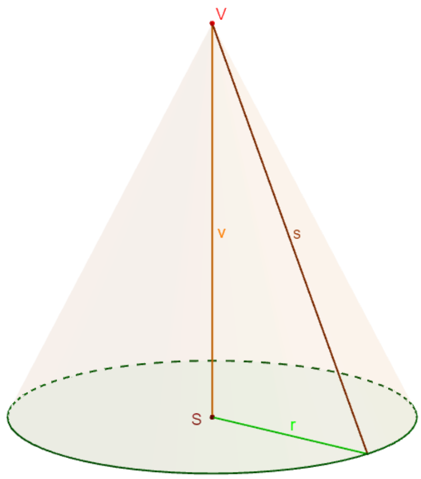
alaplap (podstava) – görbékkel határolt síkidom
testmagasság (výška telesa): v – a csúcs távolsága az alaplaptól
a kúp alkotója (strana kužeľa) – az alaplap határpontját a csúccsal összekötő szakasz
a kúp palástja (plášť kužeľa) – az alkotók összessége
egyenes kúp (kolmý kužeľ) – a csúcsot az alaplap középpontjával (súlypont) összekötő szakasz merőleges az alaplapra (azonos a testmagassággal)



ferde kúp (kosý/šikmý kužeľ) – ha nem egyenes a kúp



forgáskúp (rotačný kužeľ) – kör alapú egyenes kúp: palástja egy körcikk
tengelymetszete egyenlő szárú háromszög



általános kúp:

$S = S_p + S_{pl}$

$V = \frac{1}{3} S_p . v$

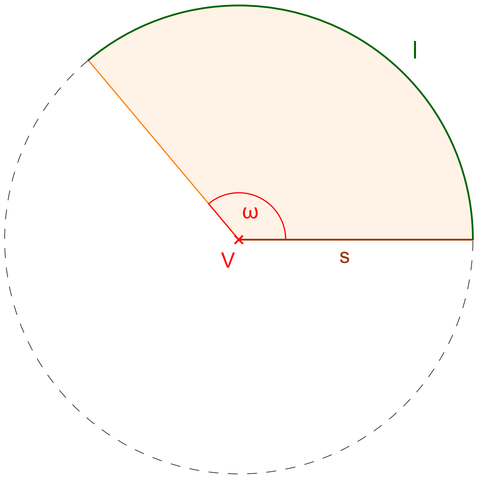
forgáskúp:

$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $\qquad\qquad s^2 = r^2 + v^2$

B.

a palást területét körcikk területeként számítjuk



a körív hossza (a körcikk sugara megegyezik a forgáskúp alkotójával: s) megegyezik az alapkör kerületével

$l = \frac{2\pi s}{360°}.\omega$

$o = 2\pi r$

$l = o \Rightarrow \frac{2\pi s}{360°}.\omega = 2\pi r$

ebből kifejezzük a középponti szöget

$\frac{2\pi s}{360°}.\omega = 2\pi r \qquad /:2\pi$

$\frac{s}{360°}.\omega = r \qquad /.\frac{360°}{s}$

$\omega = \frac{r.360°}{s}$

a körcikk területe

$S_{pl} = S_{KV} = \frac{\pi s^2}{360°}.\omega$

behelyettesítjük a középponti szöget

$S_{pl} = \frac{\pi s^2}{360°}.\frac{r.360°}{s}$

$S_{pl} = \pi.s.r$

példa:

Adott egy forgáskúp: r = 3,7; v = 8,8. Számítsuk ki a térfogatát és a felszínét.

kiszámítjuk az alaplap területét (kör)

$S_p = \pi r^2 = \pi.3,7^2 = 43,008$

ebből számolhatjuk a térfogatot

$V = \frac{1}{3}S_p.v = \frac{1}{3}.43,008.8,8$

$V = 126,158$

a palást (körcikk) felszínének kiszámolásához ismernünk kell az alkotó hosszát

$s^2 = r^2 + v^2 = 3,7^2 + 8,8^2 = 13,69 + 77,44 = 91,13$

$s = 9,546$

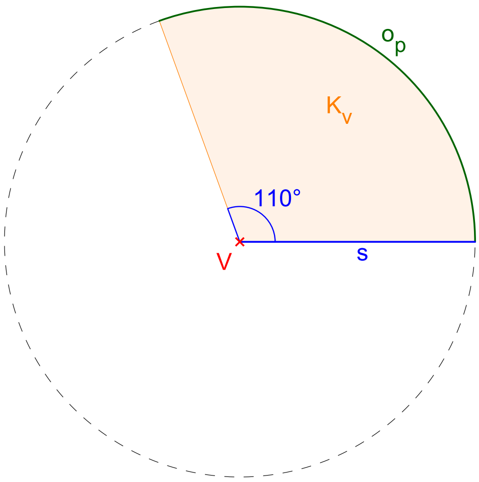
$S_{pl} = \pi rs = \pi.3,7.9,546 = 110,964$

a felszín az alaplap és a palást területeinek összege

$S = S_p + S_{pl} = 43,008 + 110,964$

$S = 153,972$

Egy 3 sugarú kör alakú pléhből ki kell vágnunk egy 110°-os középponti szögű részt, összehajlítani és összeforrasztani kúppá. Számítsuk ki a keletkezett kúp térfogatát!



az eredeti kör (körcikk) sugara lesz a forgáskúp alkotója

$r' = s = 3$

a körív hossza (a körcikk határa) megegyezik a kúp alaplapjának a kerületével

$o_p = l = \frac{2\pi r'}{360°}.\omega = \frac{2\pi.3}{360°}.110° = 5{,}760$

a kerületből megkaphatjuk az alaplap sugarát

$o_p = 2\pi r \ \longrightarrow \ r = \frac{o_p}{2\pi} = \frac{5{,}760}{2\pi} = \frac{11}{12} = 0{,}91\overline{6}$

még a testmagasságot kell kiszámolni

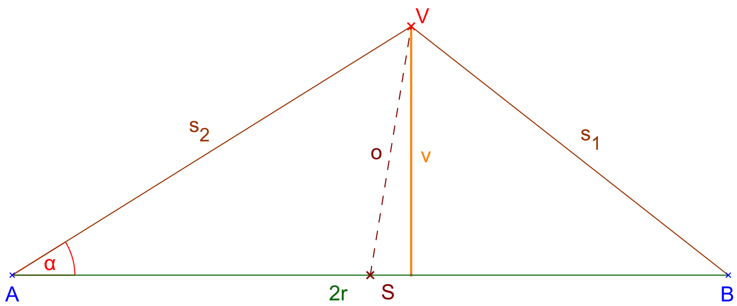
$v^2 = s^2 - r^2 = 3^2 - 0{,}91\overline{6}^2 = 9 - 0{,}840 = 8{,}160$

$v = 2{,}857$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi.0{,}917^2.2{,}86$

$V = 2{,}514$

Határozzuk meg a ferde körkúp térfogatát, ha alapkörének sugara 32, legrövidebb alkotója 36, leghosszabb alkotója pedig 42.



a kúp tengelymetszete egy általános háromszög – ismert mindhárom oldala ⇒ koszinusztétellel kiszámoljuk a testmagassággal szemközti szöget

$s_1^2 = (2r)^2 + s_2^2 - 2.2r.s_2.\cos\alpha \ \longrightarrow \ \cos\alpha = \frac{4r^2+s_2^2-s_1^2}{4rs_2} = \frac{4.32^2+42^2-36^2}{4.32.42} = \frac{4\,564}{5\,376} = \frac{163}{192} = 0{,}849\,0$

$\alpha = \cos^{-1} 0{,}849\,0 = 31°54'$

derékszögű háromszögben szögfüggvény segítségével számítjuk ki a testmagasságot

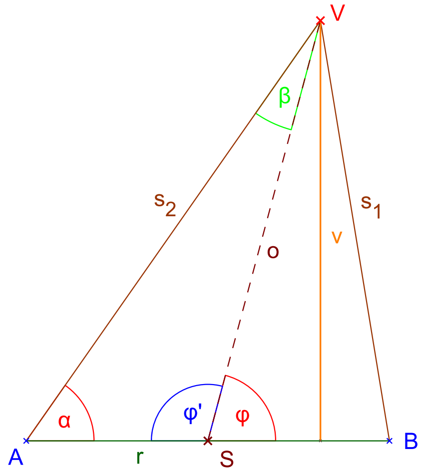
$\sin\alpha = \frac{v}{s_2} \ \longrightarrow \ v = s_2.\sin\alpha = 42.\sin 31°54' = 22{,}195$

így már behelyettesíthetünk a képletbe

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi.32^2.22{,}195$

$V = 23\,800{,}7$

Egy ferde köralapú kúp alapkörének sugara 15. A leghosszabb alkotója 55°-os szöget zár be az alaplappal. A kúp tengelye pedig 75°-os szöget. Számítsuk ki a kúp térfogatát!



jelöljük a szögeket: $\alpha = 55°$; $\varphi = 75°$

a kúp tengelymetszete egy általános háromszög – határozzuk meg a harmadik szöget

$\beta = 180° - (\alpha + \varphi') = 180° - (55° + 105°) = 20°$

az általános háromszögben először a szinusztétel segítségével kiszámítjuk a leghosszabb s_2 alkotót

$\frac{s_2}{\sin \varphi'} = \frac{r}{\sin \beta} \;\longrightarrow\; s_2 = \frac{r.\sin \varphi'}{\sin \beta} = \frac{15.\sin 105°}{\sin 20°} = 42{,}363$

majd a derékszögű háromszögben szögfüggvényt alkalmazunk

$\sin \alpha = \frac{v}{s_2} \;\longrightarrow\; v = s_2.\sin \alpha = 42{,}363.\sin 55° = 34{,}701$

tehát a térfogat

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi.15^2.34{,}70$

$V = 8\,176{,}3$