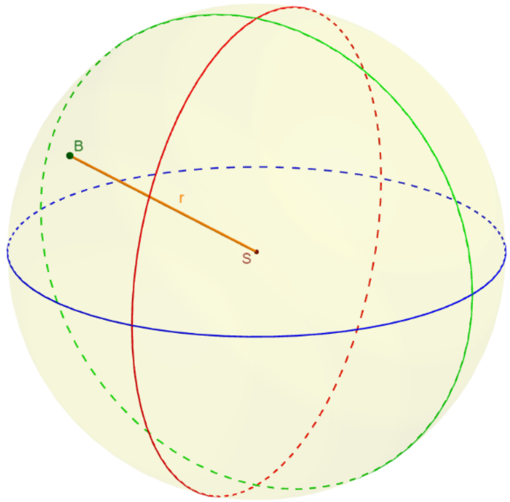
Povrch a objem gule a jej častí

D. ***Guľa*** je množina bodov v priestore, ktorých vzdialenosť od daného bodu je menšia alebo sa rovná (najviac) nejakej danej kladnej hodnote. Ten daný bod je ***stred gule*** (S) a tá daná hodnota je ***veľkosť polomeru gule*** (r).
D. ***Guľová plocha*** (hranica gule, sféra) je množina bodov v priestore, ktorých vzdialenosť od daného bodu sa rovná nejakej danej kladnej hodnote.



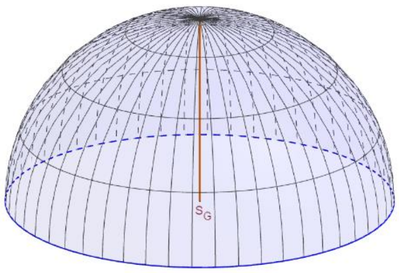
$S = 4\pi r^2$

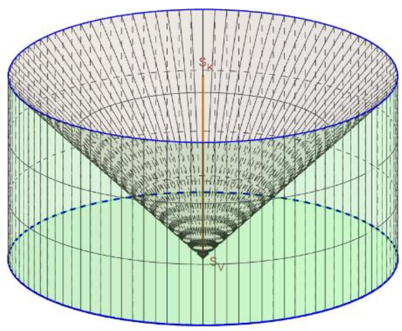
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Guľa je jednoznačne daná polomerom – obidva vzorce obsahujú polomer. Keďže povrch meriame v jednotkách štvorcových, preto vzorec obsahuje r^2, zase pri objemoch máme dostať jednotky kubické, preto je vo vzorci r^3. Pri obvodoch, obsahoch, objemoch útvarov súvisiacich s kružnicou sa objaví konštanta π. Jediné, čo sa musí človek naučiť, je konštanta (číslo) v tých vzťahoch.

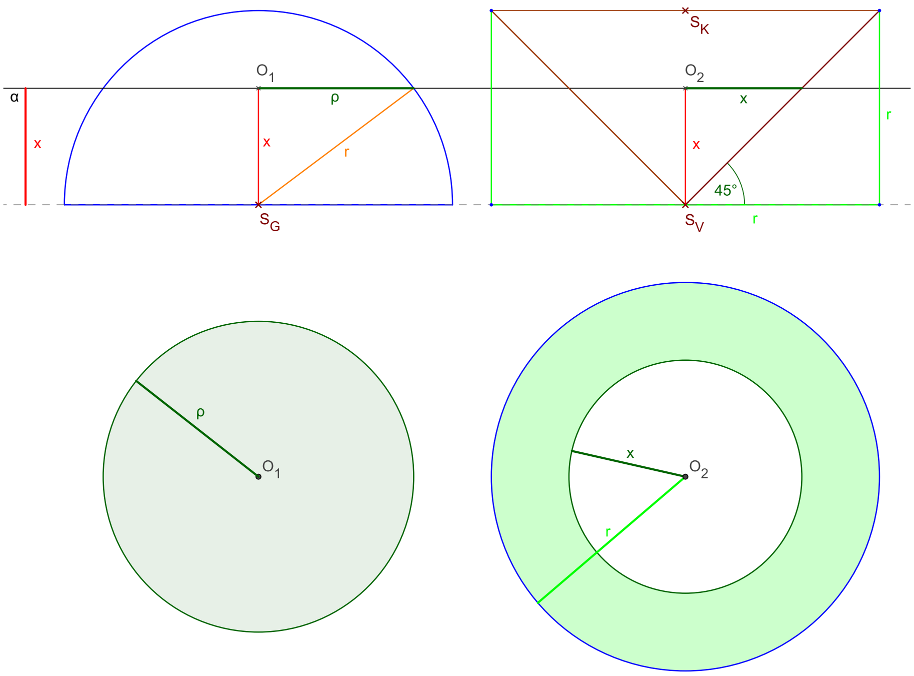
Dôkaz objemu gule je taký jednoduchý, ak využijeme jeden vzťah.
*Cavalieri*ho princíp: Ak máme dve telesá položené na jednu rovinu, ktorých obsahy podstáv sa rovnajú, a ak zoberieme ľubovoľnú rovinu rovnobežnú s tou rovinou, a pritom vzniknuté rovinné rezy jedného a druhého telesa majú rovnaké obsahy, potom aj objemy tých telies sa rovnajú.

Zoberme dve telesá a položme ich na spoločnú vodorovnú rovinu:
- prvé teleso naľavo je pologuľa (s polomerom r)
- druhé teleso napravo je rotačný valec (s polomerom r a výškou takisto r), z ktorého odstránime rotačný kužeľ, ktorý má podstavu hornú podstavu valca a vrchol v strede dolnej podstavy valca





Urobíme rez s postavou rovnobežnou rovinou v ľubovoľnej výške x z intervalu $\langle 0; r\rangle$. Z obrázku vidíme, že rez prvého telesa je kruh, a druhého telesa medzikružie.
Teraz už iba to dokázať, že tie rezy v ľubovoľnej dovolenej výške majú rovnaké obsahy.
Na druhom obrázku vidíme čelný pohľad (osový rez) a pod tým pohľad zhora.



Vypočítajme obsahy jednotlivých rezov:

prvý rez je kruh s polomerom ρ

$S_1 = \pi.\rho^2$

na obrázku vidíme, že ρ je jedna odvesna v pravouhlom trojuholníku – Pytagorovou vetou pokračujeme

$\rho^2 = r^2 - x^2$

to dosadíme do obsahu

$S_1 = \pi.(r^2 - x^2) = \pi.r^2 - \pi.x^2$

druhý rez je medzikružie s polomerom vonkajšieho kruhu r

vnútorný polomer ešte treba určiť – z obrázku vidíme, že pravouhlý trojuholník napravo je rovnoramenný (dve odvesny s dĺžkou r)

preto uhly na základni (prepone) sú 45°-ové

potom v menšom pravouhlom trojuholníku s červenou odvesnou dĺžky x uhol tejto odvesny a prepony (ako doplnkový uhol) je takisto 45°-ový → preto aj tretí uhol musí byť 45°-ový

ak dva uhly trojuholníka sú zhodné, potom ten trojuholník je rovnoramenný

takže polomer vnútorného kruhu je x

obsah medzikružia je rozdiel obsahov kruhov

$S_2 = \pi.r^2 - \pi.x^2$

$S_1 = S_2$

týmto sme dokázali, že v ľubovoľnej výške obsahy rezov sa rovnajú → prejdime na objem

objem druhého telesa dostaneme, ak z objemu rotačného valca odčítame objem rotačného kužeľa

$V_2 = V_V - V_K = \pi.r^2.r - \frac{1}{3}\pi.r^2.r = \pi.r^3 - \frac{1}{3}\pi.r^3 = \frac{2}{3}\pi.r^3$

takže aj prvé teleso (pologuľa) má takýto objem

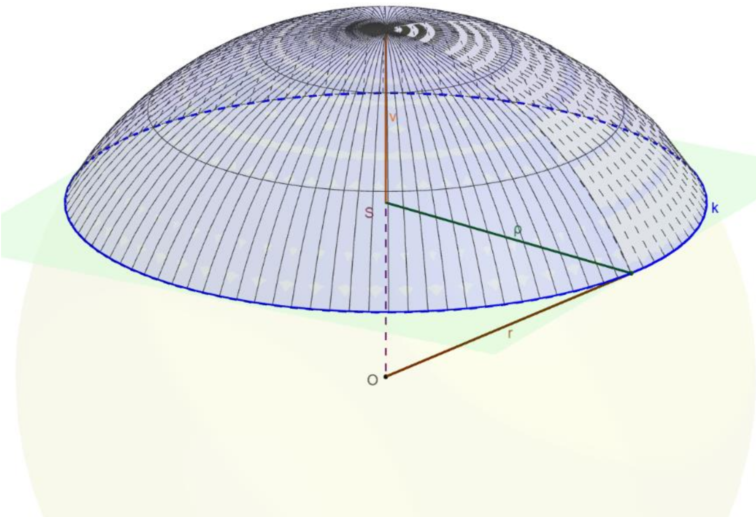
$V_1 = V_2 = \frac{2}{3}\pi.r^3$

celá guľa má potom dvojnásobný objem

$V = 2.V_1 = 2.\frac{2}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\pi.r^3$

1. guľový vrchlík

D. Jedna rovina prechádzajúca guľovou plochou, rozdelí ju na dva ***guľové vrchlíky***. Podstava je kružnica s polomerom ρ, a výška v je kolmica na stred podstavy.



Toto teleso nemá objem iba povrch.

$S = 2\pi rv$

2. guľový odsek

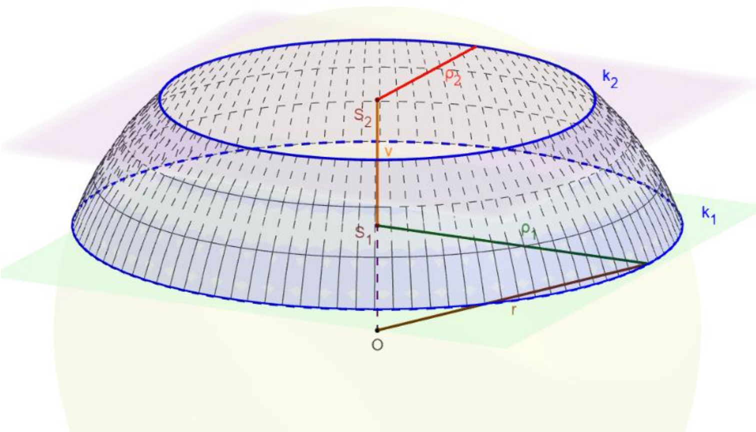
D. Jedna rovina prechádzajúca guľou, rozdelí ju na dva ***guľové odseky***. Hranicu telesa tvorí podstava (kruh s polomerom ρ) a guľový vrchlík.

$S = \pi\rho^2 + 2\pi rv$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$

3. guľový pás

D. Dve rovnobežné roviny prechádzajúce guľovou plochou, rozdelia ju na dva guľové vrchlíky a jeden ***guľový pás*** (časť medzi rovinami). Podstavy sú kružnice s polomermi ρ_1 a ρ_2, a výška v je vzdialenosť podstáv.



Toto teleso nemá objem iba povrch.

$S = 2\pi rv$

4. guľová vrstva

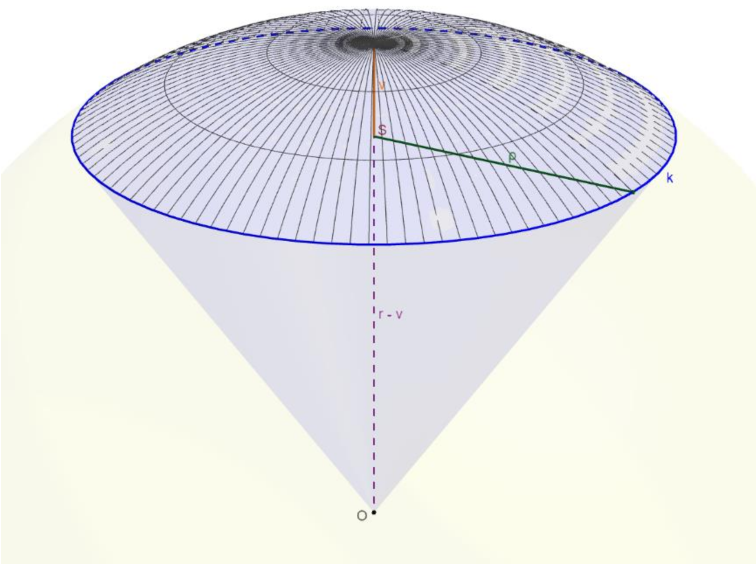
D. Dve rovnobežné roviny prechádzajúce guľou, rozdelia ju na dva guľové odseky a jednu ***guľovú vrstvu*** (časť medzi rovinami). Hranicu telesa tvoria dve podstavy (kruhy s polomermi ρ_1 a ρ_2) a guľový pás – povrch je súčet obsahov týchto plôch.

$S = \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 + 2\pi rv$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

5. guľový výsek

D. Prienik nekonečnej rotačnej kužeľovej plochy (s vrcholom v strede gule) s guľou je ***guľový výsek***. Toto teleso je vlastne zjednotenie rotačného kužeľa a guľového odseku so spoločnou podstavou. Hranicu telesa tvorí plášť rotačného kužeľa a guľový vrchlík. Polomer spoločnej podstavy je označený písmenom ρ, výška guľového vrchlíka je v, polomer gule r figuruje v telese ako strana kužeľa a výška kužeľa vychádza na $r - v$.



$S = \pi\rho r + 2\pi rv = \pi r(\rho + 2v)$

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

Dô.

objem dostaneme ako súčet objemov: kužeľ + odsek

$V = V_K + V_{GO} = \frac{1}{3}\pi\rho^2(r - v) + \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \frac{1}{3}\pi\rho^2 r - \frac{1}{3}\pi\rho^2 v + \frac{\pi v}{6}3\rho^2 + \frac{\pi v}{6}v^2 =$

$= \frac{1}{3}\pi\rho^2 r - \frac{1}{3}\pi\rho^2 v + \frac{1}{2}\pi\rho^2 v + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{1}{3}\pi\rho^2 r + \frac{1}{6}\pi\rho^2 v + \frac{1}{6}\pi v^3$

môžeme využiť vzťah medzi polomerom podstavy, výškou a stranou rotačného kužeľa: $r^2 + v^2 = s^2$

$\rho^2 + (r - v)^2 = r^2 \rightarrow \rho^2 = r^2 - (r - v)^2 = r^2 - (r^2 - 2rv + v^2) = 2rv - v^2$

dosadíme

$V = \frac{1}{3}\pi(2rv - v^2)r + \frac{1}{6}\pi(2rv - v^2)v + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{2}{3}\pi r^2 v - \frac{1}{3}\pi rv^2 + \frac{1}{3}\pi rv^2 - \frac{1}{6}\pi v^3 + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

príklad:

Železná guľa má hmotnosť 10 *kg*, hustota $\rho = 7\,800\ \frac{kg}{m^3}$. Vypočítajte objem a povrch gule.

najprv vypočítame objem

$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{10}{7\,800} = 0{,}001\,282\ m^3 = 1{,}282\ dm^3$

$V = 1\,282{,}1\ cm^3$

pokračujeme s polomerom

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3.1\,282{,}1}{4\pi}} = \sqrt[3]{306{,}07} = 6{,}739\ cm$

dosadíme do vzorca

$S = 4\pi r^2 = 4\pi.6{,}739^2$

$S = 84{,}687\ cm^2$

Objem dutej gule je 2 851. Aká je hrúbka steny, keď vnútorný polomer je 8?

objem dutej gule dostaneme ako rozdiel objemov gúľ

$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3$

dosadíme údaje

$2\,851 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi.8^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - 2\,144{,}66$

$4\,995{,}66 = = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$\frac{3.4\,995{,}66}{4\pi} = r_1^3$

$1\,192{,}63 = r_1^3 \rightarrow r_1 = 10{,}605$

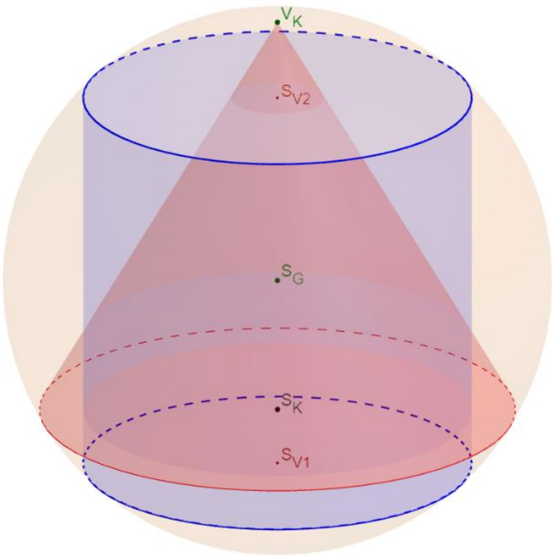
rozdiel polomerov gúľ je hrúbka steny

$h = 10{,}605 - 8$

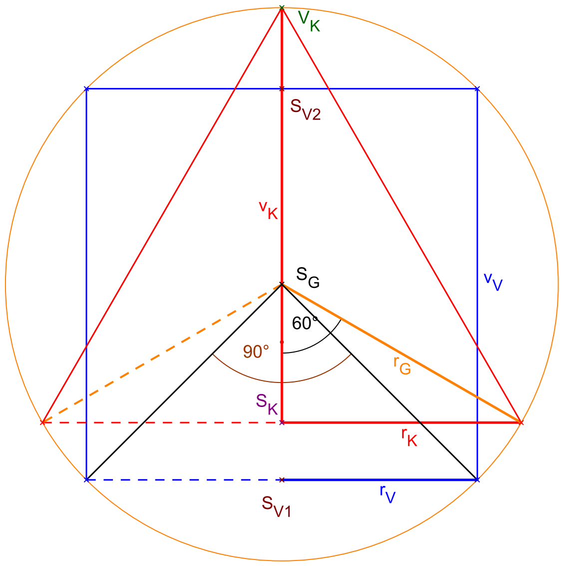
$h = 2{,}605$

Guli je vpísaný rovnostranný valec a rovnostranný kužeľ. Určte pomer povrchov a objemov troch telies.

v priestore takto vyzerajú tieto telesá



osový rez pomôže nájsť vzťah medzi údajmi z ktorých počítame povrchy a objemy tých telies
skúsime všetko vyjadriť pomocou polomeru gule



$$(2r_V)^2 = r_G^2 + r_G^2$$
$$4r_V^2 = 2r_G^2$$
$$r_V^2 = \frac{r_G^2}{2}$$
$$r_V = \frac{r_G}{\sqrt{2}}$$

$r_V = \frac{\sqrt{2}}{2}.r_G$

$v_V = 2.r_V = \sqrt{2}.r_G$

$$\sin 60° = \frac{r_K}{r_G}$$
$$r_G.\sin 60° = r_K$$

$r_K = \frac{\sqrt{3}}{2}.r_G$

$v_K = \frac{3}{2}.r_G$

$s_K = 2r_K = \sqrt{3}.r_G$

teraz už iba dosadiť do vzorcov

$S_G = 4\pi r_G^2$

$S_V = 2\pi r_V^2 + 2\pi r_V.v_V = 2\pi\frac{r_G^2}{2} + 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.r_G.\sqrt{2}.r_G = \pi r_G^2 + 2\pi r_G^2 = 3\pi r_G^2$

$S_K = \pi.r_K^2 + \pi.r_K.s_K = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_G\right)^2 + \pi.\frac{\sqrt{3}}{2}.r_G.\sqrt{3}.r_G = \frac{3}{4}\pi r_G^2 + \frac{3}{2}\pi r_G^2 = \frac{9}{4}\pi r_G^2$

môžeme písať pomer povrchov telies:

$S_G : S_V : S_K = 4\pi.r_G^2 : 3\pi.r_G^2 : \frac{9}{4}\pi.r_G^2$

po zjednodušení pomerov s $\pi.r_G^2$ ostáva

$S_G : S_V : S_K = 4 : 3 : \frac{9}{4}$

rozšírime o 4, aby neostalo racionálne číslo v pomere

$S_G : S_V : S_K = 16 : 12 : 9$

pokračujeme s objemami

$V_G = \frac{4}{3}\pi.r_G^3$

$V_V = \pi.r_V^2.v_V = \pi.\frac{r_G^2}{2}.\sqrt{2}.r_G = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.r_G^3$

$V_K = \frac{1}{3}\pi.r_K^2.v_K = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_G\right)^2.\frac{3}{2}r_G = \frac{1}{3}\pi.\frac{3}{4}r_G^2.\frac{3}{2}r_G = \frac{3}{8}\pi.r_G^3$

môžeme písať pomer objemov telies:

$V_G : V_V : V_K = \frac{4}{3}\pi.r_G^3 : \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.r_G^3 : \frac{3}{8}\pi.r_G^3$

po zjednodušení pomerov s $\pi.r_G^3$ ostáva

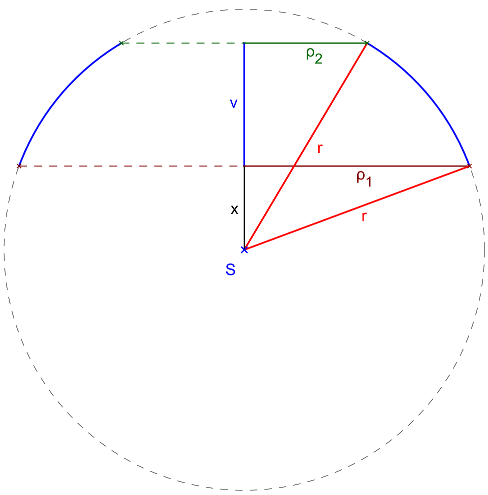
$V_G : V_V : V_K = \frac{4}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3}{8}$

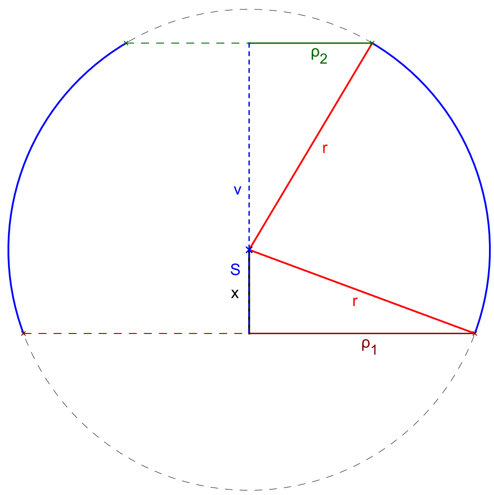
rozšírime o 24, aby neostalo racionálne číslo v pomere

$V_G : V_V : V_K = 32 : 12\sqrt{2} : 9$

Vypočítajte povrch a objem guľovej vrstvy vysokej 15. Priemer dolnej podstavy je 55, hornej podstavy 30.

potrebujeme vypočítať polomer gule z ktorej vznikla vrstva – povrch guľového pása obsahuje ten údaj





teoreticky stred gule môže byť mimo guľovej vrstvy a môže ho aj obsahovať
polohu dozvieme po riešení rovnice
dostaneme opačné čísla → kladná hodnota vychádza pri správnej polohe

v pravouhlých trojuholníkoch využijeme Pytagorovu vetu

$$x^2 + \rho_1^2 = r^2$$
$$(v + x)^2 + \rho_2^2 = r^2$$

dosadíme hodnoty

$$x^2 + 27{,}5^2 = r^2$$
$$(15 + x)^2 + 15^2 = r^2$$

môžeme písať rovnosť ľavých strán

$$x^2 + 27{,}5^2 = (15 + x)^2 + 15^2$$
$$x^2 + 756{,}25 = 225 + 30x + x^2 + 225 \qquad /-x^2$$
$$756{,}25 = 30x + 450 \qquad /-450$$
$$306{,}25 = 30x \qquad /:30$$
$$x = \frac{245}{24} = 10{,}208$$

z toho vypočítame polomer

$r^2 = 10{,}208^2 + 27{,}5^2 = 860{,}460$

$r = 29{,}334$ – polomer gule v prípade, keď je stred mimo vrstvy

$$x^2 + \rho_1^2 = r^2$$
$$(v - x)^2 + \rho_2^2 = r^2$$

dosadíme hodnoty

$$x^2 + 27{,}5^2 = r^2$$
$$(15 - x)^2 + 15^2 = r^2$$

môžeme písať rovnosť ľavých strán

$$x^2 + 27{,}5^2 = (15 - x)^2 + 15^2$$
$$x^2 + 756{,}25 = 225 - 30x + x^2 + 225 \qquad /-x^2$$
$$756{,}25 = -30x + 450 \qquad /-450$$
$$306{,}25 = -30x \qquad /:(-30)$$
$$x = -\frac{245}{24} = -10{,}208$$

v prípade, keď sme rátali so stredom vo vnútri vrstvy, vychádza záporná – nemožná hodnota

môžeme počítať povrch

$S = \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 + 2\pi rv = \pi.27{,}5^2 + \pi.15^2 + 2\pi.29{,}334.15 = 2\,375{,}83 + 706{,}86 + 2\,764{,}63$

$S = 5\,847{,}31$

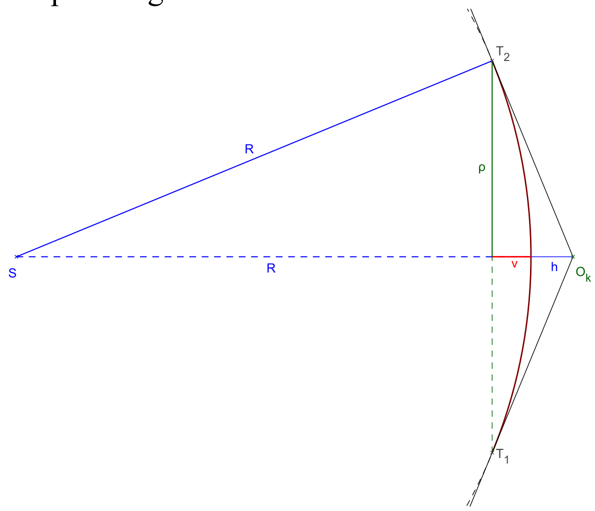
aj objem

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2) = \frac{\pi.15}{6}(3.27{,}5^2 + 3.15^2 + 15^2) = \frac{\pi.15}{6}(2\,268{,}75 + 675 + 225)$

$V = 24\,887{,}3$

Koľko percent zemského povrchu vidí kozmonaut z paluby orbitálneho komplexu z výšky $h = 520\ km$ nad Zemou? (Polomer Zeme je $R = 6\,370\ km$.)

máme vlastne vypočítať povrch guľového vrchlíka



v pravouhlom trojuholníku môžeme využiť Euklidovu vetu o výške: $v^2 = c_a.c_b$

$\rho^2 = (R - v).(v + h)$

v menšom Pytagorovu vetu

$R^2 = \rho^2 + (R - v)^2 \rightarrow \rho^2 = R^2 - (R - v)^2$

dosadíme

$$R^2 - (R - v)^2 = (R - v).(v + h)$$
$$R^2 - (R^2 - 2Rv + v^2) = Rv + Rh - v^2 - vh$$
$$R^2 - R^2 + 2Rv - v^2 = Rv + Rh - v^2 - vh \qquad /+v^2$$
$$2Rv = Rv + Rh - vh \qquad /-Rv + vh$$

$$Rv + vh = Rh$$
$$v(R + h) = Rh \qquad /:(R + h)$$
$$v = \frac{Rh}{R+h} = \frac{6\,370.520}{6\,370+520}$$
$$v = 480{,}755\ km$$

už môžeme dosadiť do vzorca

$S = 2\pi Rv = 2\pi.6\,370.480{,}755$

$S = 19\,241\,674{,}1\ km^2$

vypočítame povrch zemegule

$S_Z = 4\pi R^2 = 4\pi.6\,370^2$

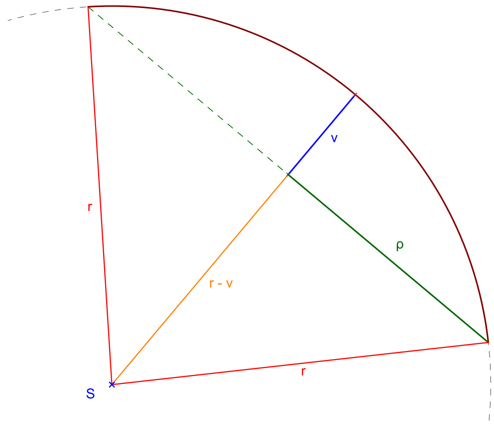
$S_Z = 509\,904\,363{,}8\ km^2$

percentuálne

$\frac{S}{S_Z}.100 = \frac{19\,241\,674{,}1}{509\,904\,363{,}8} = \frac{200}{53} = 3{,}774\ \%$

Vypočítajte povrch a objem guľového výseku, keď guľový odsek, ktorý je časťou výseku, má polomer podstavy $\rho = 10$ a výšku $v = 4$.

potrebujeme určiť polomer gule



znovu môžeme využiť Pytagorovu vetu

$$r^2 = \rho^2 + (r - v)^2$$
$$r^2 = \rho^2 + r^2 - 2rv + v^2 \qquad /-r^2$$
$$0 = \rho^2 - 2rv + v^2 \qquad /+2rv$$
$$2rv = \rho^2 + v^2 \qquad /:2v$$
$$r = \frac{\rho^2+v^2}{2v} = \frac{10^2+4^2}{2.4}$$
$$r = 14{,}5$$

dosadíme

$S = \pi\rho r + 2\pi rv = \pi.10.14{,}5 + 2\pi.14{,}5.4 = 455{,}53 + 364{,}42$

$S = 819{,}96$

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{2}{3}\pi.14{,}5^2.4$

$V = 1\,761{,}39$