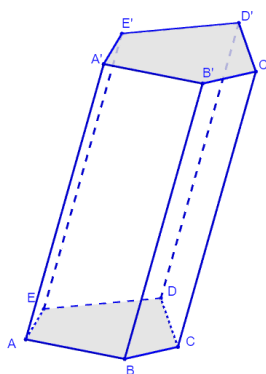
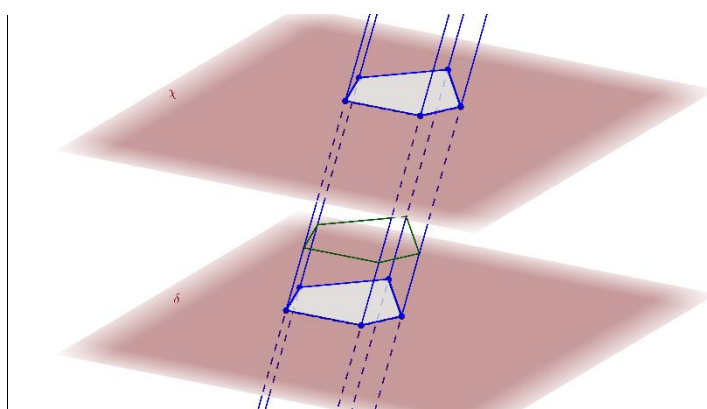
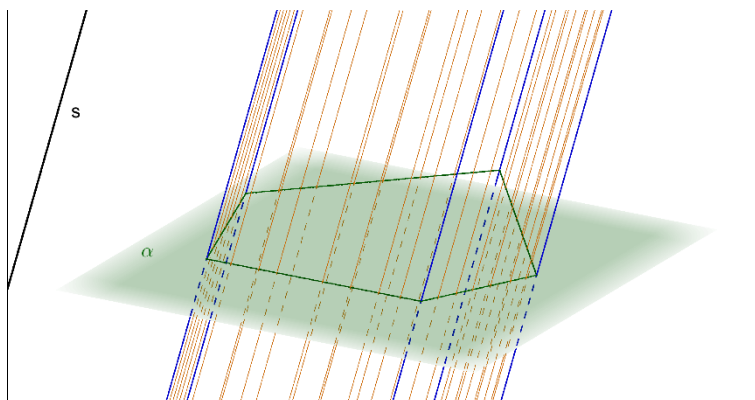


## Povrch a objem hranola

D. Daný je mnohouholník (*riadiaci* alebo *určujúci útvar*) a priamka, ktorá nie je rovnobežná s rovinou mnohouholníka. Ak hraničnými bodmi mnohouholníka (stranami) vedieme priamky rovnobežné s danou priamkou, vznikne nekonečná hranolová plocha – nekonečný hranol. Ak teraz zoberieme dve rovnobežné roviny, ktoré prechádzajú hranolovou plochou, vznikne **hranol (prizma)**, ako časť nekonečnej hranolovej plochy medzi rovnobežnými rovinami (spoločná časť hranolovej plochy s vrstvou).



**podstavy** – dva rovnobežné, zhodné mnohouholníky (zhodné aj s určujúcim útvarom)

dolná podstava: ABCD

horná podstava: A'B'C'D'

**výška telesa:**  $v$  – vzdialenosť podstáv

**hrana podstavy** (podstavná hrana: AB, BC, ..., C'D', D'A') – strana podstavy

**bočná hrana** (AA', BB', CC', DD') – s danou priamkou rovnobežná spojnica vrcholov dolnej a hornej podstavy sú navzájom rovnobežné a zhodné

**strany hranola** – spojnice hraničných bodov dolnej a hornej podstavy rovnobežné s danou priamkou okrem bočných hrán

**bočná stena** (ABB'A', BCC'B', ...) – je ohraničená susednými bočnými hranami a dvomi podstavnými hranami bočné steny sú rovnobežníky

ich počet sa rovná počtu vrcholov (strán) podstavy

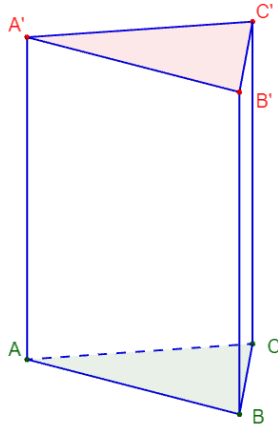
**plášť hranola** – súhrn bočných stien

**stenová uhlopriečka:**  $u_s$  (AB', BA', BC', CB', ...) – uhlopriečka steny hranola

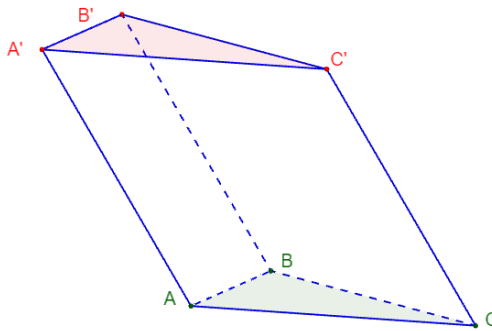
stenová uhlopriečka podstavy  
stenová uhlopriečka bočnej steny

**telesová uhlopriečka:**  $u_t$  – spojnica vrcholov dolnej a hornej podstavy, ktorá neleží v bočnej stene

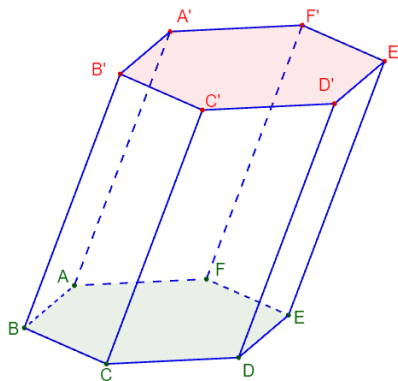
**kolmý hranol** – bočné hrany sú kolmé na podstavu  
⇒ bočné steny sú kolmé na podstavu  
⇒ výška telesa je rovnaká, ako dĺžka bočných hrán



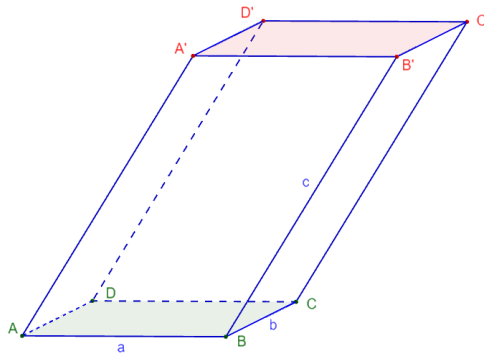
**kosý (šikmý) hranol** – ak hranol nie je kolmý (bočné hrany zvierajú s podstavami iný uhol ako pravý)



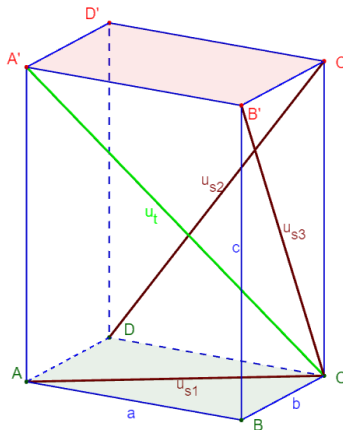
**pravidelný n-boký hranol** – podstavy sú pravidelné n-uholníky



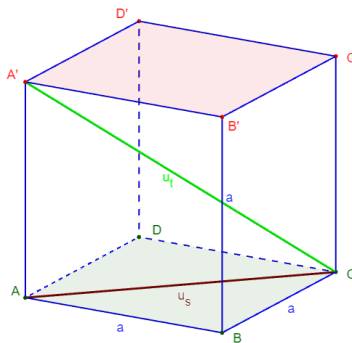
**rovnobežnosten** – všetky steny aj podstavy sú rovnobežníky  
⇒ tri dvojice stien sú zhodné



**kváder** – štvorboký kolmý hranol s obdĺžnikovou podstavou  
 $\Rightarrow$  všetky steny sú obdĺžniky



**kocka** (hexaéder) – kváder so štvorcovými stenami – jedno z piatich pravidelných (Platónskych) telies



**D.** Teleso je **pravidelné**, ak má všetky hrany zhodné, všetky uhly hrán zhodné a všetky uhly stien zhodné.  
**P.** Pravidelné telesá majú všetky steny zhodné.

**prizma** – trojboký kolmý hranol

všeobecný hranol:

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

$$V = S_p \cdot v$$

kváder:

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

$$u_{s1} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$u_{s2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$u_{s3} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

kocka:

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$u_s = \sqrt{2}a$$

$$u_t = \sqrt{3}a$$

príklad:

Vypočítajte hmotnosť kocky s hranou dĺžky  $a = 40 \text{ cm}$  vyrobenej zo smrekového dreva s hustotou  $\rho = 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

$$V = a^3 = 40^3 = 64\,000 \text{ cm}^3$$

$$\rho = 550 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$m = \rho \cdot V = 0,55 \cdot 64\,000$$

$$m = 35\,200 \text{ g} = 35,2 \text{ kg}$$

Dĺžky hrán kvádra sú v pomere  $2 : 5 : 9$ . Vypočítajte dĺžky hrán, ak viete, že povrch kvádra je  $S = 1\,314$ .

$$a : b : c = 2 : 5 : 9$$

$$a = 2x$$

$$b = 5x$$

$$c = 9x$$

$$S = 2(ab + ac + bc) = 2(2x \cdot 5x + 2x \cdot 9x + 5x \cdot 9x) = 2(10x^2 + 18x^2 + 45x^2) = 146x^2$$

$$1\,314 = 146x^2 \quad /:146$$

$$9 = x^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$3 = x$$

$$a = 6$$

$$b = 15$$

$$c = 27$$

Pravidelný trojboký hranol s hranou podstavy  $a = 6$  má obsah plášťa  $S_{pl} = 90$ . Určte jeho povrch a objem.

$$S_{pl} = 3a \cdot v \rightarrow v = \frac{S_{pl}}{3a} = \frac{90}{3 \cdot 6}$$

$$v = 5$$

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2$$

$$S_p = 9 \cdot \sqrt{3} = 15,588$$

$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 15,588 + 90$$

$$S = 121,177$$

$$V = S_p \cdot v = 15,588 \cdot 5$$

$$V = 77,942$$

Pravidelný päťboký hranol s hranou podstavy  $a = 11$  má výšku  $v = 24$ . Určte jeho povrch a objem.

$$\omega = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\text{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{a}{2 \text{tg} \frac{\omega}{2}} = \frac{11}{2 \text{tg} 36^\circ}$$

$$\rho = 7,570$$

$$S_p = 5 \cdot \frac{a \cdot \rho}{2} = 5 \cdot \frac{11 \cdot 7,570}{2}$$

$$S_p = 208,178$$

$$S_{pl} = 5 \cdot a \cdot v = 5 \cdot 11 \cdot 24$$

$$S_{pl} = 1\,320$$

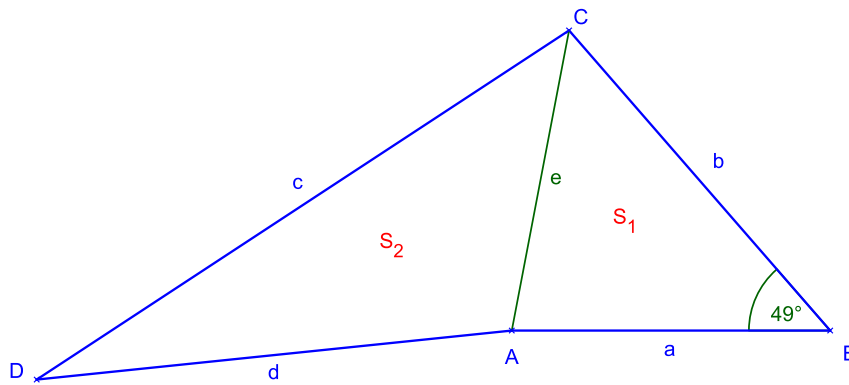
$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 208,178 + 1\,320$$

$$S = 1\,736,356$$

$$V = S_p \cdot v = 208,178 \cdot 24$$

$$V = 4\,996,266$$

Aký objem má štvorboký kosý hranol s podstavnými hranami s dĺžkou  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 8$ ,  $d = 6$ , ak bočná hrana s dĺžkou  $h = 12$  má odchýlku od podstavy  $62^\circ$  a hrany  $a$ ,  $b$  zvierajú uhol s veľkosťou  $49^\circ$ ?



podstavu sme rozdelili na dva trojuholníky:  $\triangle ABC$  a  $\triangle ACD$

obsah prvého ( $\triangle ABC$ ) počítame z dvoch strán a nimi zovretého uhla

$$S_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin 49^\circ}{2} = \frac{4.5 \cdot \sin 49^\circ}{2} = 7,547$$

vypočítame kosínusovou vetou uhlopriečku  $e$ , ako tretiu stranu  $\triangle ABC$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 50,5^\circ = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 49^\circ = 14,758$$

$$e = 3,842$$

obsah druhého ( $\triangle ACD$ ) počítame z troch strán pomocou Herónov-ho vzorca

$$s = \frac{c+d+e}{2} = \frac{8+6+3,842}{2} = 8,921$$

$$S_2 = \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-e)} = \sqrt{8,921(8,921-8)(8,921-6)(8,921-3,842)} = 11,039$$

$$S_p = S_1 + S_2 = 7,547 + 11,039 = 18,586$$

bočná hrana  $s$  podstavou  $a$  a výškou tvoria pravouhlý trojuholník  $\rightarrow$  využijeme goniometrickú funkciu

$$\sin 62^\circ = \frac{v}{h} \rightarrow v = h \cdot \sin 62^\circ = 12 \cdot \sin 62^\circ = 10,595$$

$$V = S_p \cdot v = 18,586 \cdot 10,595$$

$$V = 196,926$$